Estimación de series temporales utilizando modelos de regresión armónica.

Francisco Parra Rodríguez
Doctor Economía UNED
Jefe de Servicio de Estadísticas Económicas y Sociodemográficas del Instituto Cantabro de Estadísticas.

Introducción

Se presenta una estimación de una función de producción para la economía española utilizando la forma flexible de Fourier. Dicha función ajusta los datos del PIB pb a los del empleo equivalente a jornada completa y stock de capital neto excluida vivienda, los dos primeros proceden de la contabilidad nacional de España del INE en una serie enlazada que va de 1975 al 2008, valorándose el PIB en euros constantes, el stock de capital es el publicado por la función BBVA. El desarrollo del artículo es el siguiente. En primer apartado se realiza una revisión de de las funciones de producción y coste utilizadas en la investigación económica, en un segundo apartado se expone el problema de la flexibilidad en estas funciones, en un tercer apartado se estudia la forma flexible de Fourier en versión de Gallant (1981,1982), en desarrollos que utilizan varias exógenas, finalmente se procede a estimar una función flexible para la economía española siguiendo dicha técnica.

Funciones de producción y coste.

Griffin, Montgomery, y Rister (1987) en una revisión de la tradicional literatura económica acerca de las funciones de producción, identificaron veinte formas funcionales (tabla 1) frecuentemente utilizadas, los nombres de cada una de estas funciones y sus formas algebraicas aparecen listadas en la primera columna de la tabla 1, en las siguientes figuran las principales propiedades de dichas funciones, en la tabla 2 figuran las primeras derivadas.

Tabla 1. Formas funcionales más frecuentes.

Funcion	Forma funcional $(i, j, k = 1,.....n)$	(A) Si x_i=0 para todo i implica que y=0?	(B) Si x_i=0 para un i implica que y=0?	(C) $\partial y / \partial x_i$	(D) Convergencia asintótica
Leontief	$y = \min[\beta_1 x_1, \beta_2 x_2, ..., \beta_n x_n] \;\; \beta > n$	si	si	0 o UBC	no
Lineal	$y = \alpha + \sum_i \beta_i x_i$	no	no	UBC	no
Cuadrática[a]	$y = \alpha + \sum_i \beta_i x_i + \sum_i \sum_j \delta_{ij} x_i x_j$	no	no	U	no
Cúbica[ab]	$y = \alpha + \sum_i \beta_i x_i + \sum_i \sum_j \delta_{ij} x_i x_j$ $+ \sum_i \sum_j \sum_k \lambda_{ijk} x_i x_j x_k$	no	no	U	no
Leontief generalizada[a]	$y = \sum_i \sum_j \delta_{ij} x_i^{1/2} x_j^{1/2}$	si	no	UBN	no
Square root[a]	$y = \alpha + \sum_i \beta_i x_i^{1/2} + \sum_i \sum_j \delta_{ij} x_i^{1/2} x_j^{1/2}$	no	no	U	no
Logaritmica	$y = \alpha + \sum_i \beta_i \ln x_i$	indefinido	indefinido	UBN	no
Mistcherlich	$y = \alpha + \prod_i \{1 - \exp(\beta_i x_i)\}$	si	si	UBN	si $\beta < 0$
Spillman	$y = \alpha + \prod_i (1 - \beta_i^{x_i})$	si	si	UBN	si $0 < \beta < 1$
Coob-Douglas	$y = \alpha + \prod_i x_i^{\beta} i$	si	si	UBN	no
Generalizada de Coob-Douglas[a]	$\ln y = \alpha + \sum_i \sum_j \delta_{ij} \ln\left({x_i + x_j} / 2 \right)$	indefinida	no	U	no
Transcendental	$y = \alpha + \prod_i x_i^{\beta_i} (\exp(\delta_i x_i))$	si	si	U	no

Resistance	$y^{-1} = \alpha + \sum_i \beta_i \left(\delta_i + x_i\right)^{-1}$	no	no	UBN	si
Resistance modificada[a]	$y^{-1} = \alpha + \sum_i \beta_i x_i^{-1} + \sum_i \sum_{j \neq i} \delta_{ij} x_i^{-1} x_j^{-1}$	indefinido	indefinido	UBN	si
CES	$y = \left[\alpha + \sum_i \beta_i x_i^{-\beta}\right]^{\nu/\rho}$	indefinido	indefinido	UBN	no
Translog[a]	$\ln y = \alpha + \sum_i \beta_i \ln x_i + \sum_i \sum_j \delta_{ij} \left(\ln x_i\right)\left(\ln x_j\right)$	indefinido	indefinido	U	no
Generalizada cuadrática	$y = \left[\sum_i \sum_j \beta_{ij} x_i^{\delta\gamma} x_j^{\delta(1-\gamma)}\right]^{\nu/\delta}$	si	no	UBN	no
Generalizada de potencias	$y = \alpha \prod_i x_i^{\int/}(x) \exp\left(g\left(x\right)\right)$	si	si	U	no
Generalizada Box-Cox	$y\left(\theta\right) = \alpha + \sum_i \beta_i x_i \left(\lambda\right) + \sum_i \sum_j \delta_{ij} x_i \left(\lambda\right) x_j \left(\lambda\right)$ $donde\ \ y\left(\theta\right) = \left(y^{2\theta} - 1\right) \big/ 2\theta$ $donde\ \ x_i\left(\lambda\right) = \left(x_i^{\lambda} - 1\right) \big/ \lambda$	no	no	U	no
Aumentada de Fourier	$y = \alpha + \sum_i \beta_i x_i + \sum_i \sum_j \delta_{ij} x_i x_j$ $+ \sum_{\lvert h \rvert^* \leq H} \gamma_h \exp\left(i \sum_i h_i x_i\right)$ $donde\ todo\ \ x_i \in \left[0, 2\pi\right],$ $\gamma_h = \gamma_h^r + i\gamma_h^c, i^2 = -1$	no	no	U	no

Funcion	(E) Lineal Homogénea	(F) Homotetica	(G) Elesticiadad constante de sustitución	(H) Concavidad [c]	(I) Número de distintos parámetros	(J) Linealidad separable	(K) Linealidad separable si $x_i = 0$	(L) Subsumida en otras funciones
Leontief	Si	Si	$\sigma = 0$	si	n	no	no	
Lineal	Si $\alpha = 0$	Si	$\sigma = \infty$	affine	n+1	si	si	
Cuadrática[a]	Si $\alpha = 0$, todo $\delta_{ij} = 0$	si $\beta = 0$ ó $\delta_{ij} = 0$	NG	NG	$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$	si	si	lineal
Cúbica[ab]	[d]	[e]	NG	NG	$(n+3)(n+2)(n+1)/6$	si	si	Lineal cuadrática
Leontief generalizada[a]	Si	Si	NG	si todo $\delta_{ij} \geq 0$	$\frac{1}{2}(n)(n+1)$	si	si	
Square root[a]	Si $\alpha = 0$, $\beta = 0$	si $\beta = 0$	NG	si $\beta > 0$, todo $\delta_{ij} \geq 0$	$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$	si	si	Generalizada de Leontief
Logarítmica	No	Si	NG	si $\beta > 0$	n+1	si	indefinido	
Mistcherlich	No	No	NG	si $\alpha > 0$, $\beta < 0$, $\sum \exp(\beta_i x_i) < 1$	n+1	no	no	Spillman
Spillman	No	No	NG	si $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$, $\sum \beta_i^{x_j} < 1$	n+1	no	no	Mistcherlich
Coob-Douglas	Si $\sum \beta_i = 1$	Si	$\sigma = 1$	si $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$, $\sum \beta_i < 1$	n+1	si	no	
Generalizada de Coob-Douglas[a]	Si $\sum_i \sum_j \delta_{ij} = 1$	Si	no	NG	$\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$	si	[f]	Coob-Douglas
Transcendental	Si $\sum \beta_i = 1$, $\delta = 0$	si $\delta = 0$	si $\delta = 0$	si $\beta > 0$, $\delta > 0$	2n+1	si	no	Coob-Douglas
Resistance	Si $\alpha = 0$, $\delta = 0$	si $\delta = 0$	NG	si $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$, $\sum \beta_i < 1$	2n+1	si	si	
Resistance modificada[a]	Si $\alpha = 0$, todo $\delta_{ij} = 0$	si todo $\delta_{ij} = 0$	NG	NG	$\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$	si	indefinida	
CES	Si $\alpha = 0$, $v = 1$	Si	$\sigma = 1/(1+\rho)$	Si $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 < v < 1$	n+3	NG	indefinida	Lineal, Coob-Douglas
Translog[a]	Si $\sum \beta_i = 1$, todo $\sum_i \delta_{ij} = 0$	Si todo $\sum_i \delta_{ij} = 0$	NG	Si $\beta > 0$, todo $\delta_{ij} \geq 0$	$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$	si	indefinida	Coob-Douglas

Generalizada cuadrática	Si $\nu = 1$	Si	NG	Si todo $\beta_{ij} \geq 0$, $0 \leq \gamma \leq 1$, $\delta \leq 1$, $\nu \leq 1$	n^2+3	NG	NG	Generalizada de Leontief, CES
Generalizada de potencias	NG	NG	NG	NG	indeterminada	NG	NG	Transcendental
Generalizada Box-Cox	Si $\sum \beta_i = 2\alpha\lambda + 1$, todo $\lambda\beta_i = 2\sum_i \delta_{ij}$	Si todo $\delta_{ij} = 0$ o todo $\delta_{ij} = 0$, $i \neq j$ y todo $\lambda\beta_i = 2\delta_{ij}$	NG	NG	[g]	NG	NG	[i]
Aumentada de Fourier	No	No	NG	NG	[h]	si	si	Lineal cuadrática

Notas: U sin restricciones de signo (+, 0, ó -); UBC sin restricciones de signo pero constante; UBN sin restricciones de signo but nonswitching (ejemplo si $\partial y / \partial x_i > 0$ para algún $x_i > 0$, entonces $\partial y / \partial x_i > 0$ para todo $x_i > 0$); y NG no en general.

[a] Asumimos que $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ para todo *i, j*.

[b] Asumimos que $\lambda_{ijk} = \lambda_{jik} = \lambda_{ikj} = \lambda_{jki} = \lambda_{kij} = \lambda_{kji}$ para todo *i, j, k.*

[c] Algunas de las condiciones de estado son suficientes pero no necesarias para la concavidad local

[d] Alguna como las formas cuadráticas con $\gamma_{ijk} = 0$ para todo *i,j,k.*

[e] Si alguna de las siguientes condiciones es satisfecha: (1) todo $\beta_i = 0$ (2) todo $\delta_{ij} = 0$ (3) $\gamma_{ijk} = 0$

[f] Si pero x_i puede ser igual a cero para solo un *i*.

[g] $\frac{1}{2}\left(n^2 + 3n + 3\right)$ asumiendo θ y λ son libres

[h] ver apéndice

[i] Lineal, cuadrática, generalizada de leontief, raiz cuadrada, logaritmica, Coob Douglas, resistencia modificada, CES, translogaritmica.

Fuente: Selecting Functional Form in Production Function Análisis.Ronald C. Griffin, John M. Montgomery, and M. Edward Rister. *Western Journal of Agricultural Economics,* 12(2): 216-227

Tabla 2 Primeras derivadas de las formas seleccionadas

Funcion	$\partial y / \partial x_i$
Leontief	0 o β_i
Lineal	β_i
Cuadrática[a]	$\beta_i + \sum_j 2\delta_{ij} x_j$
Cúbica[ab]	$\beta_i + \sum_J 2\delta_{ij} x_j + \sum_{j \neq i} \sum_k 6\gamma_{ijk} x_j x_k + 3\gamma_{iii} x_i^2$
Leontief generalizada[a]	$\sum_j \delta_{ij} x_i^{-1/2} x_j^{1/2}$
Square root[a]	$\left(1/2\, \beta_i + \sum_j \delta_{ij} x_i^{1/2} \right) x_j^{-1/2}$
Logaritmica	$\beta_i x_i$
Mistcherlich	$-\alpha\beta_i \exp(\beta_i x_i) \prod_{j \neq i} (1 - \exp(\beta_j x_j))$
Spillman	$-\alpha\beta_i^{x_j} \ln(\beta_i) \prod_{j \neq i} \left(1 - \beta_j^{x_j}\right)$
Coob-Douglas	$-\alpha\beta_i x_i^{-1} \prod_{j \neq i} x_j^{\beta_j}$
Generalizada de Coob-Douglas[a]	$y \sum_j 2^{\beta_{ij}} / (x_i + x_j)$
Transcendental	$\alpha\left(\delta_i + \beta_i / x_i \right) \prod_j x_j^{\alpha_j} \exp(\delta_j x_j)$
Resistance	$\beta_i y^2 (\delta_i + x_i)^{-2}$
Resistance modificada[a]	$y^2 \left(\beta_i x_i^{-2} + \sum_{i \neq j} \delta_{ij} x_i^{-2} x_j^{-1} \right)^{-2}$
CES	$\beta_i \nu x_i^{-1-\rho} \left(\alpha + \sum_i \beta_i x_i^{-\rho} \right)^{\frac{\nu+\rho}{\rho}}$
Translog[a]	$y\left(\beta_i + 2\sum_j \beta_{ij} \ln(x_j) \right) / x_i$
Generalizada cuadrática	$\nu x_i^{-1} y^{\frac{\nu-\delta}{\nu}} \left[\gamma \sum_j \beta_{ij} x_i^{\delta\gamma} x_j^{\delta(1-\gamma)} + (1-\gamma) \sum_j \beta_{ij} x_i^{\delta(1-\gamma)} x_j^{\delta\gamma} \right]$
Generalizada de potencias	
Generalizada Box-Cox	$x_i^{\lambda-1} y^{1-2\theta} \left[\lambda\beta_i + 2\sum_j \delta_{ij} \left(x_i^{\lambda} - 1\right) \right] / \lambda$

Aumentada de Fourier	$\beta_i + \sum_j 2\delta_{ij} x_j + i \sum_{\lvert h \rvert^* \leq H} h_i \gamma_h \exp\left(i \sum_i h_i x_i \right)$

Si se desea conocer las propiedades de estas funciones consultar las referencias bibliográficas que se citan al final del texto: Heady y Dillon (quadratic, square root, Mitscherlich, Spillman, resistance, modified resistance); Lau (square roots); Halter, Carter, and Hocking (transcendental); Uzawa (CES); Silberberg (CES); Diewert (generalized Leontief); Christensen, Jorgenson, y Lau (translog - transcendental logaritmica); Fuss, McFadden, y Mundlak (translog, generalized Cobb- Douglas, square root); Denny (generalized quadratic); Berndt and Khaled (generalized Box-Cox) y Gallant (augmented Fourier).

A la hora de escoger una función para un trabajo de economía aplicada hay que tener presente una serie de criterios, que Griffin, Montgomery, y Rister (1987) agrupan en cuatro categorías de acuerdo a la relación que tienen con la presencia de hipótesis, la estimación, los datos o las aplicaciones sobre las que estemos trabajando.

En lo concerniente a la presencia de hipótesis hay que tener en cuenta que algunas funciones pueden no verificar las hipótesis que se establezcan en los fundamentos teóricos de la función a estimar. Por tanto, a la hora de elegir la forma funcional a utilizar en la estimación empírica, hay que escoger aquella especificación que permita el análisis de dichas hipótesis sin imponer restricciones a priori. Como han apuntado Fuss, McFadden, y Mundlak (1978), escoger una forma funcional determina que algunas hipótesis no puedan ser verificadas, "a veces la cuestión de si las hipótesis especificas podrían ser testadas o mantenidas es critica" (Ladd, 1979).
En este sentido la forma funcional debe ser consistente con la satisfacción o violación de las hipótesis teóricas establecidas, de modo que los resultados empíricos obtenidos sean consecuencia de los datos y no de la elección de la forma funcional. Esta propiedad es lo que se denomina flexibilidad sustantiva de la forma funcional.

Por tanto, sería preferible usar formas funcionales que eviten restricciones impuestas por la propia forma funcional, como son las llamadas formas funcionales flexibles, desarrolladas sobre la base de que proporcionan una buena aproximación local a una función arbitraria dos veces diferenciable (Diewert, 1974). Esto permite además, que restricciones adicionales tales como homogeneidad, homoteticidad, separabilidad, rendimientos constantes a escala o elasticidad de sustitución constante puedan ser contrastados empíricamente a partir de los datos, más que impuestas como restricciones a priori.

Aunque, las formas funcionales flexibles, son menos restricitivas en cuanto a la presencia de hipótesis, hay que tener en cuenta la gran información necesaria para especificar adecuadamente tales relaciones. Caves, Christensen y Tretheway (1980) señalan la existencia de tres problemas que pueden restar atractivo a las formas funcionales flexibles utilizadas en el trabajo empírico, a saber: la violación de las condiciones de regularidad en la estructura de la producción, la estimación de un número excesivo de parámetros y la incapacidad para permitir observaciones que contengan niveles nulos . En cierto sentido el establecer reducciones en lo relativo a la presencia de hipótesis tiene sus costes, añadir flexibilidad es no siempre deseable, y hay igualmente que tener en cuenta un coste efectivo de oportunidad al considerar una particular dimensión de flexibilidad.

La forma funcional tiene implicaciones para el proceso estadístico de estimación de los parámetros. La disponibilidad de suficientes datos, las propiedades de estos datos, y la disponibilidad de recursos computacionales pueden afectar a la elección de la forma funcional en el proceso de estimación estadística. A menudo, algunas formas no permiten la estimación de los parámetros por procedimientos de MCO, y procedimientos alternativos típicos que ofrecen poca información concerniente a las propiedades del estimador.

Una tercera categoría de criterios de selección implica consideraciones específicas sobre la aproximación que se realiza a los datos, en este sentido el grado de significación y grado de bondad estadística en relación a la variable explicativa es un criterio de selección de la función a utilizar en la aplicación econométrica.

El cuarto grupo de criterios de selección pertenece a las características de la aplicaciones específicas que estemos estudiando, así, por ejemplo si el resultado de la ecuación es ser usado en simulación o procedimientos de optimización, determinadas propiedades de las formas funcionales pueden ser deseables a otras propiedades.

En general se suele preferir una forma funcional a otra según el ejercicio se trate de de función de producción, una de demanda, beneficios o coste de producción, así los recientes avances en literatura apuntan a que las formas flexibles han sido preferidas en aplicaciones de demanda y coste.

Una de las forma funcional más utilizada en la estimación econométrica de de funciones de producción es la función Cobb-Douglas, fácil de estimar pero que presenta importantes limitaciones o restricciones. La función Cobb-Douglas ha sido ampliamente utilizada en la literatura para examinar los efectos de escala, dado que estos podían ser fácilmente contrastados parametricamente por referencia a los exponentes de la función1. Esta función pertenece a la clase de funciones homogéneas y por tanto restringe la forma en la cual pueden ocurrir tanto los efectos de escala como las elasticidades de sustitución. Existen formas funcionales que superan estas limitaciones. Así, la función de elasticidad de sustitución constante (CES) fue la extensión natural de la Cobb-Douglas ya que permitía que la elasticidad de sustitución pudiese tomar valores distintos de la unidad. Si se busca una función que permita que la elasticidad de sustitución cambie al variar el producto o las proporciones de los factores productivos utilizados, la forma funcional que permite estas dos generalizaciones es la función transcendental logarítmica o translog.

En el análisis de las funciones de producción, las formas funcionales flexibles más utilizadas son la función cuadrática y translog. Cada una de estas formas funcionales flexibles tiene ventajas e inconvenientes de modo que la elección entre ambas es algo que dependerá del objetivo del trabajo[2].

En la estimación de sistemas de demanda (funciones de utilidad) se venían utilizando las especificaciones algebraicas de las funciones lineales, CES y Coob-Douglas, que se caracterizan por imponer restricciones, explícita o implícitamente, sobre la función de utilidad. Por ello, los ultimos análisis han desarrollado aproximaciones a las

---

[1] La función es homogénea de grado $\alpha + \beta_1 + \ldots + \beta_n$. Si $\alpha + \beta_1 + \ldots + \beta_n > 1$ hay rendimientos crecientes a escala, si $\alpha + \beta_1 + \ldots + \beta_n = 1$ indica rendimientos constantes y si $\alpha + \beta_1 + \ldots + \beta_n < 1$, entonces existen rendimientos decrecientes a escala.

[2] Para mayor detalle consultar Tovar, Jara-Díaz, Trujillo (2004) .http://www.fceye.ull.es/new/investigacion/docum/ull-ulpgc/DT2004-06.pdf

funciones de utilidad (directa o indirecta) o de gasto en lugar de formas algebraicas específicas.

En principio, los únicos requerimientos exigidos a estas formas son que, en primer lugar, deben poseer suficientes parámetros como para que puedan considerarse una aproximación adecuada a la verdadera función de utilidad o gasto; y, en segundo lugar, deben generar funciones de demanda potencialmente integrables, es decir, capaces de verificar las restricciones teóricas.

Las formas flexibles más usadas en el análisis de la demanda son las que proceden de aproximaciones de Taylor, de las que destacan las formas Translog introducidas por Christensen, Jorgenson y Lau (1975), y el Sistema de Demanda Casi Ideal, AIDS, propuesto por Deaton y Muellbauer (1980), que es el más utilizado en la historia reciente de la teoría de la demanda.[3]

Flexibilidad

Dado que la forma funcional de la relación entre la variable dependiente y los regresores es en general desconocida, uno puede preguntarse si existe un modelo parametrico que pueda aproximar una amplia variedad de relaciones funcionales. Flexibilidad es así un concepto multidimensional, y dar una definición técnica de flexibilidad puede no ser adecuado a todas las situaciones.

La flexibilidad local (a veces Diewert flexibilidad o simplemente flexibilidad) implica que una aproximación a una forma funcional converge a error cero (aproximación perfecta) para una función arbitraria en sus dos primeras derivadas en un punto particular.

Las series de expansión de Taylor han dominado el campo de las formas de flexibilidad local pero no es la única posibilidad de ofrecer flexibilidad local (Barnett). Ignorando las complicaciones de la estimación estadística se puede asumir se puede aproximar funcionalmente una relación conocida a una forma flexibles imponiendo amplios errores en la aproximación funcional y sus derivadas lejos del punto de aproximación perfecta (Despotakis, 1980).

Los problemas asociados a la estimación de estos modelos ha reducido el atractivo de las formas de flexibilidad local. El ejemplo propuesto por White (1980) demuestra que los estimadores mínimo cuadrados de las series de expansión de Taylor no son indicadores muy reales del vector de los parámetros para una expansión cierta de una función conocida. Como consecuencia de estas y otras investigaciones, las propiedades predictivas de las formas de flexibilidad local han sido encontradas poco satisfactorias.

La flexibilidad global (a menudo flexibilidad de Sobolev) se prefiere a la flexibilidad local por la ausencia de restricciones de segundo orden en cualquier punto (Gallant 1981, 1982). En principio, los únicos requerimientos exigidos a estas formas flexibles son que, en primer lugar, deben poseer suficientes parámetros como para que puedan considerarse una aproximación adecuada a la verdadera función; y, en segundo lugar, deben generar funciones potencialmente integrables, es decir, capaces de verificar las restricciones teóricas.

---

[3] Para más detalle consultar Ramajo J. "Avances recientes en el análisis econométrico de la demanda ".http://eco.unex.es/jramajo/ivcnea.pdf

En su aplicación, a menudo, la norma de Sobolev no permite obtener parámetros estimados, entonces la estimación de las formas flexibles globales podría usar las tradicionales medidas de distancia de mínimos cuadrados (Elbadawi, Gallant, y Souza, 1983).

Forma Flexible de Fourier

Gallant (1981,1982) mostró que la versión logaritmica de la forma flexible de Fourier tiene las propiedades de minimización de distancia de los espacios de Sobolev[4]. La forma de Fourier de Gallant posee la propiedad de flexibilidad global, es decir, permite aproximar arbitrariamente cerca tanto a la función como a sus derivadas sobre todo el dominio de definición de las mismas. La idea que subyace en este tipo de aproximaciones que se denominan semi-no-paramétricas es ampliar el orden de la base de expansión, cuando el tamaño de la muestra aumenta, hasta conseguir la convergencia asintótica de la función aproximante a la verdadera función generadora de los datos y a sus derivadas.

Por tratarse de una forma Sobolev-flexible (frente a la Diewert-flexibilidad de las anteriores) se pueden estimar consistentemente las elasticidades y sobre todo el espacio de datos (ElBadawi, Gallant y Souza, 1983); además, asintóticamente pueden conseguirse contrastes estadísticos insesgados (Gallant, 1981, 1982) y la eliminación del problema de inferencias aumentadas provocado por la especificación de un determinado modelo. Por último, Gallant y Souza (1991) han mostrado la normalidad asintótica de las estimaciones derivadas de la forma de Fourier.

En la parte negativa, el modelo de Fourier puede conseguir la regularidad global, pero las restricciones paramétricas que ello implica son excesivamente fuertes (Gallant, 1981); sin embargo, existen condiciones más débiles (que no destruyen ni la flexibilidad ni la consistencia de los estimadores) con las que se puede conseguir la regularidad teórica al menos sobre un conjunto finito de puntos (Gallant y Golub, 1983), aunque la implentación de tales restricciones resulta compleja (McFadden, 1985).

En cualquier caso, las simulaciones de Monte Carlo realizadas por Fleissig, Kastens y Terrell (1997) y Chalfant y Gallant (1985) han mostrado que la región de regularidad de la forma de Fourier libre -sin restricciones de ningún tipo- es mucho mayor que la correspondiente a las formas Leontief-Generalizada o Translog.

Un polinomio de Fourier viene dado por la expresión:

---

[4] La forma flexible es un espacio Sobolev-flexible si es posible elegir una secuencia de coeficientes $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$ donde la logitud del vector β_k puede depender de k tal que:

$$\lim_{K \to \infty} K^{m-l-\varepsilon} \left\| f - f_K(\beta_K) \right\|_{l,p,\mu} = 0$$

Donde f es una función cierta, g_k es la forma flexible, m es el numero de veces que f es diferenciable, l es la derivada parcial de mayor orden considerada relevante en la aproximación, $\varepsilon > 0$, y $l \leq p \leq \varepsilon$, si una derivada parcial de orden menor o igual a l se acerca mal a la aproximación con una distribución de probabilidad μ entonces la distancia de la función de arriba será alta.

$$\frac{a}{2}+\sum_{j=1}^{k}\left(u_j\cos(jw_o t)+v_j\sin(jw_o t)\right)$$

Donde k es el número de ciclos teóricos o armónicos que consideramos, siendo el máximo n/2.

$w_0=\dfrac{2\pi}{n}$ es la frecuencia fundamental (también denominada frecuencia angular fundamental).

t toma los valores enteros comprendidos entre 1 y n (es decir, t = 1, 2, 3, ...n).

Los coeficientes de los armónicos vienen dados por las expresiones:

$$\frac{a}{2}=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\,,u_j=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i\cos(w_0t_i j)\right),v_j=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\sin(w_ot_i j)$$

La aproximación a una función no periódica $g(x)$ por una serie de expansión de Fourier se realiza en Gallart (1981) añadiendo es esta un término lineal y cuadrático. De esta forma que la aproximación univariada se escribe como:

$$g(x/\theta)=a+bx+\frac{1}{2}cx^2+\sum_{j=1}^{J}u_j\cos(jx)-v_js\sin(jx)\text{ (1)}$$

El vector de parámetros es $\theta=(a,b,c,u_1v_1,...,u_J,v_J)$ de longitud $K=3+2J$.

Suponiendo que los datos siguieran el modelo $y_i=g(x_i)+e_i$ para i=1,2,…,n estimariamos θ por mínimos cuadrados, minimizando

$$s_n(\theta)=\left(1\!\!\diagup_{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-g_K(x_i/\theta)\right]^2$$

Dado que la variable exógena x_i no esta expresada en forma periódica, debe de transformase o normalizarse en un intervalo de longitud menor que 2π , $[0,2\pi]$.

Considerando θ^0 la solución al problema de minimización anterior, podríamos obtener diferentes soluciones minimocuadráticas para $g(x)$, considerando diferentes valores de n y K y elegir aquel de ellos que mejor aproxime, $g(x)$, $(d/dx)g(x)$, y $(d^2/dx^2)g(x)$. La norma de Sobolev permite evaluar dichos errores de aproximación.

La expresión de la primera y segunda derivada de la función (1) son las siguientes:

$$D_xg(x/\theta)=b+cx+\sum_{j=1}^{J}\left(-u_j\sin(jx)-v_j\cos(jx)\right)j$$

$$D_x^2g(x/\theta)=c+\sum_{j=1}^{J}\left(-u_j\cos(jx)+v_j sen(jx)\right)j^2$$

La aproximación multivariada se describe en Gallant (1984):

$$g(x/\theta)=u_o+b'x+\frac{1}{2}x'Cx+\sum_{\alpha=1}^{A}\left\{u_{0\alpha}+2\sum_{j=1}^{J}\left[m_{j\alpha}\cos(jk_\alpha' z)+n_{j\alpha}\sin(jk_\alpha' z)\right]\right\}$$

Donde, x es un vector de Nx1 variables, b es un vector de Nx1 coeficientes, C es una matriz simetrica de de NxN coeficientes, z es un vector Nx1 de valores transformados de x, $m_{j\alpha}$ y $n_{j\alpha}$ son coeficientes, $k_{\alpha}^{'} = \left[k_{x_1}, k_{x_2}, ..., k_{x_N}\right]$ son multi-indices, vectores de 1xN elementos que representan a la derivadas parciales de una función de producción de Fourier para los diferentes tipos de expansión.

Dado que las variable exógenas no están expresada en forma periódica, deben de transformase o normalizarse en un intervalo de longitud menor que 2π. Fulginiti et all (2003) sugieren la transformación siguiente:

Dado el vector de variables x que vamos a transformar, definimos

$l_i = \ln a_i + \ln x_i > 0$, $i = 1,2,..., N$

donde $a_i = -Min\{\ln x_i\} + 10^{-5}$

entonces el valor de las variable transformada sería:

$z_{it} = j\lambda k_{\alpha}^{'}(\ln a_t + \ln x_t)$

Siendo

$$\lambda = \frac{2\pi - \varepsilon}{\max\{l_i : i = 1,2,..., N\}}$$

Donde ε es valor positivo arbitrario y pequeño, si bien se recomienda escoger:

$$\lambda = \frac{6}{\max\{l_i : i = 1,2,..., N\}}$$

La forma flexible que aproxima a una ecuación con tres variables exógenas, y j=1 sería:

$$\begin{aligned} Y_t &= \mu_0 + \sum_{i=1}^{3} b_i x_{it} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} c_{ii} x_{ii}^2 + \sum_{i=1}^{3}\sum_{k>1}^{3} c_{ik} x_{it} x_{kt} + \\ &+ [m_t \cos(z_t) + n_t \sin(z_t)] + \sum_{i=1}^{3}\sum_{k>1}^{3} [m_{ik} \cos(z_{it} - z_{kt}) + n_{ik} \sin(z_{it} - z_{kt})] \\ &+ \sum_{i=1}^{3}\sum_{k>i}^{3} [m_{ik1} \cos(z_{it} - z_{it} - z_t) + n_{ik1} \sin(z_{it} - z_{kt} - z_t)] \\ &+ \sum_{i=1}^{3}\sum_{k>i}^{3} [m_{ik2} \cos(z_{it} - z_{it} + z_t) + n_{ik2} \sin(z_{it} - z_{kt} + z_t)] \end{aligned}$$

Es habitual en este tipo de trabajos incluir una tendencia temporal como variable exógena, en cuyo caso la forma flexible sería[5]:

[5] Carbo S. y Rodriguez F. (2005) estiman una función de coste para el sector bancario español utilizando tres variables explicativas cuya especificación puede consultarse en: www.revecap.com/encuentros/anteriores/viieea/autores/R/26.doc

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \mu_0 + \sum_{i=1}^{3} b_i x_{it} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} c_{ii} x_{ii}^2 + \sum_{i=1}^{3}\sum_{k>1}^{3} c_{ik} x_{it} x_{kt} + b_t t + \frac{1}{2} b_{tt} t^2 + \sum_{i=1}^{3} b_{it} x_{it} t \\
&+ \left[m_t \cos(z_t) + n_t \sin(z_t)\right] + \sum_{i=1}^{3}\sum_{k>1}^{3}\left[m_{ik} \cos(z_{it} - z_{kt}) + n_{ik} \sin(z_{it} - z_{kt})\right] \\
&+ \sum_{i=1}^{3}\sum_{k>i}^{3}\left[m_{ik1} \cos(z_{it} - z_{it} - z_t) + n_{ik1} \sin(z_{it} - z_{kt} - z_t)\right] \\
&+ \sum_{i=1}^{3}\sum_{k>i}^{3}\left[m_{ik2} \cos(z_{it} - z_{it} + z_t) + n_{ik2} \sin(z_{it} - z_{kt} + z_t)\right]
\end{aligned}
$$

Estimación de una función de producción para la economía española.

Partiendo de las cifras del PIB a precios básicos, empleo y Stock de Capital neto excluido el valor de la vivienda de la economía española:

Tabla nº3. Capital (mill. de euros año 2000), Empleo (miles) y PIB (mill. de euros año 2000)

	Capital neto real	Empleo	PIB (millones)
1971	287585,66	12742,72	265269,03
1972	313349,11	12878,2	286886,21
1973	343283,18	13193,99	309230,94
1974	375335,47	13262,25	326605,31
1975	404631,13	13027,95	328375,81
1976	432199,83	12889,41	339224,61
1977	458612,89	12785,5	348855,31
1978	483518,78	12443,22	353957,42
1979	506136,32	12176,33	354106,13
1980	528181,39	11901,28	358711,56
1981	548008,92	11589,57	358078,85
1982	568062,23	11482,61	363686,47
1983	587173,34	11428,62	371758,55
1984	602936,87	11155,61	377213,22
1985	621421,83	11350,18	387066,61
1986	644963,2	11509,09	399452,75
1987	675177,11	12028,62	421987,45
1988	712213,73	12433,04	443768,18
1989	758619,33	12859,87	464793,48
1990	808722,39	13322,35	482179,5
1991	859995,8	13449,68	493114,62
1992	906540,21	13240,85	496503,97
1993	942945,11	12851,72	490727,82
1994	980092,96	12787,54	501775,35
1995	1022003,73	13019,8	515404,98
1996	1061600,75	13202,7	527862,38
1997	1105227,24	13668	548283,76

1998	1157200,61	14258	572781,96
1999	1216974,4	14920,6	599965,83
2000	1279995,27	15669,5	630263
2001	1344329,27	16175,5	653255
2002	1407090,51	16548,6	670920,42
2003	1471647,53	16948,7	691694,68
2004	1538893,97	17404,7	714291,2
2005	1613370,13	17970,1	740108,02
2006	1696689,85	18564	769850,23
2007	1787711,05	19089,5	797366,78
2008	1876891,99	18988,2	804223,06

Fuente: CNE-INE y Series de Stock de capital fijo del BBVA

Las series de PIB y Empleo se han construido enlazando las cifras de la serie 1995-2009 de la CNE del INE Base 2000, y la serie histórica de contabilidad nacional Base 1986.

La ecuación utilizada para la aproximación es la siguiente:

$$\ln Y_t = \mu_0 + b_1 \ln K_t + b_2 \ln E_t + b_{11}(\ln K_t)^2 + b_{22}(\ln E_t)^2 + b_{12} \ln K_t \ln E_t$$
$$+ [m_1 \cos(k_t) + n_1 \sin(k_t)] + [m_2 \cos(e_t) + n_2 \sin(e_t)] + [m_{11} \cos(2k_t) + n_{11} \sin(2k_t)]$$
$$+ [m_{22} \cos(2e_t) + n_{22} \sin(2e_t)] + [m_{121} \cos(k_t + e_t) + n_{121} \sin(k_t + e_t)]$$

Los coeficientes estimados por MCO serían:

-31,79996321		-0,023261489	cos(E)
14,61349494	K	0,016931168	sin(E)
-12,85377816	E	0,027712588	cos(2K)
-0,082339496	K2	-0,032771582	sin(2K)
1,598188275	E2	-0,008077161	cos(2E)
-1,243992175	K*E	0,005286256	sin(2E)
0,050672691	cos(K)	0,005605462	cos(K + E)
0,048398481	sin(K)	0,017261537	sin(K+E)

F	*3,574495415*
R^2	*0,99990*
n	*22*

Nota:11 parámetros estimados son significativos al 5%

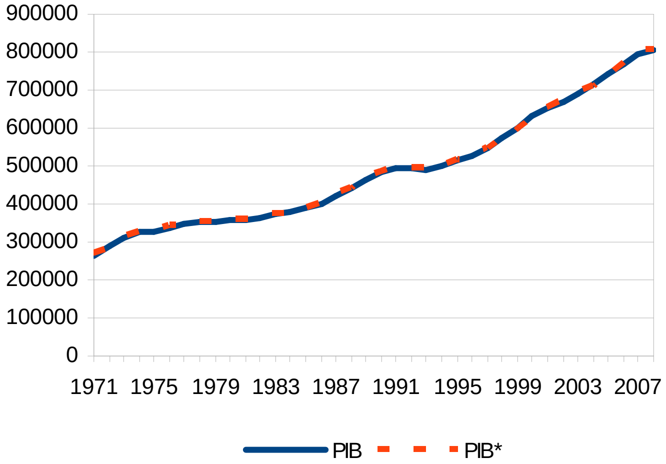
Los resultados de la aproximación figuran en la tabla nº 4 y figura nº 1.

Tabla nº4. Aproximación del PIB

PIB*

1971	265684,02
1972	285739,56
1973	310281,07
1974	325335,46
1975	330415,76
1976	338992,59
1977	349048,96
1978	351393,29
1979	354853,78
1980	357695,75
1981	358577,96
1982	365782,44
1983	373567,77
1984	375104,48
1985	386682,08
1986	399082,17
1987	422397,19
1988	443365,36
1989	464112,05
1990	483422,38
1991	493178,51
1992	495197,78
1993	493198,44
1994	499743,49
1995	514789,87
1996	529004,41
1997	548879,77
1998	572521,81
1999	599839,43
2000	628401,80
2001	652469,46
2002	673430,38
2003	693686,51
2004	714068,47
2005	738041,62
2006	767894,95
2007	800099,12
2008	803562,05

Figura nº1



Bibliografía

Barnett, W. A. "New Indices of Money Supply and the Flexible Laurent Demand System." *J. Bus. and Econ. Statist.* 1(1983):7-23.

Bhansali, R.J. (1979) "A Mixed Spectrum Analysis of the Lynx Data," *Journal of the Royal Statistical Society,* Ser. A, 142(2), 199-209.

Campbell, M.J. and Walker, A.M. (1977), \A Survey of Statistical Work on the Mackenzie River Series of Annual Canadian Lynx Trappings for the Years 1821-1934 and a New Analysis," *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. A*, 140(4), 411-431.

Carbo S. y Rodriguez F. (2005): Operaciones fuera de balance y economías de escala en el sector bancario español. Documento de trabajo: www.revecap.com/encuentros/anteriores/viieea/autores/R/26.doc

Chalfant J. y Gallant A. (1985), "Estimating substitution elasticities with the Fourier costs function, some Monte Carlo results", Journal of Econometrics, 28, 205-222.

Despotakis, K. A. "Economic Performance of Flexible Functional Forms." *Eur. Econ. Rev.* 30(1986): 1107-43.

Diewert, W. E. "An Application of the Shephard Duality Theorem: A Generalized Leontief Production Function." *J. Polit. Econ.* 79(1971):481-507.

Diewert W. y Wales T. (1987), "Flexible Functional Forms and Global Curvature Conditions", conometrica, 55, No. 1, 43-68.

Diewert W. y Wales T. (1988), "A Normalized Quadratic Semiflexible Functional Form", Journal of Econometrics, 37, 327-42.

Elbadawi, I., A. R. Gallant, and G. Souza. "An Elasticity Can Be Estimated Consistently without A Priori Knowledge of Functional Form." *Econometrica* 51(1983):1731-51.

Fleissig A., Kastns T. y Terrell D. (1997), "Semi-nonparametric estimates of substitution elasticities", Economics Letters, 54, No. 3, 209-219.

Gallant, A. R.(1981) "On the Bias in Flexible Functional Forms and an Essentially Unbiased Form." *J. Econometrics* 15(1981):211-45.

Gallant, A. R.(1984) "The Fourier Flexible Form." *Amer. J. Agr. Econ.* 66(1984):204-15.

Gallant A. y Golub G. (1984), "Imposing Curvature Restrictions on Flexible Functional Forms", Journal of Econometrics, 26, 295-321

Griffin R.C., Montgomery J.M., and Rister M.E.. Selecting Functional Form in Production Function Análisis Western Journal of Agricultural Economics, 12(2): 216-227

Lilyan E. Fulginiti, Richard K. Perrin and Bingxin Yu (2003): “Institution and agricultural productivity in sub-sahara Africa”. 25 International Conference of Agricultural Economists (IAAE). Durban South Africa.

McFadden, D. "Constant Elasticity of Substitution Production Functions." *Rev. Econ. Stud.* 30(1963):73-83. Maddala, G. S. *Econometrics.* New York: McGraw-Hill Book Co., 1977.

Ramajo J. “Avances recientes en el análisis econométrico de la demanda “.http://eco.unex.es/jramajo/ivcnea.pdf

Tovar B., Jara-Díaz S., Trujillo L. (2004). “Funciones de producción y costes y su aplicación al sector portuario. Una revisión de la literatura” DOCUMENTO DE TRABAJO 2004-06.http://www.fceye.ull.es/new/investigacion/docum/ull-ulpgc/DT2004-06.pdf

Uzawa, H. "Production Functions with Constant Elasticity of Substitution." *Rev. Econ. Stud.* 29(1962):291-99.

White, H. "Using Least Squares to Approximate Unknown Regression Functions." *Int. Econ. Rev.* 21(1980):149-70.