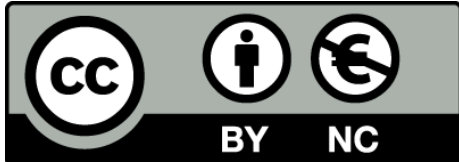


LA REGRESIÓN MINIMO CUADRADA ANALIZADA A PARTIR DEL ANALISIS ESPECTRAL.

Francisco Parra Rodriguez

Doctor en Ciencias Económicas. UNED.



Análisis espectral

La idea básica del análisis espectral es que todo proceso estocástico estacionario admite una descomposición única de su varianza, en la aportación que a la misma realizan armónicos de diferentes frecuencias.

Un armónico de frecuencia ω es una función de la forma:

$$a_{\omega} \cos(\omega \cdot t) + b_{\omega} \sin(\omega \cdot t)^1$$

En el análisis armónico, las series temporales no son consideradas funciones continuas como tal, sino que se obtienen a partir de una suma de n ciclos con una amplitud y un periodo determinado, o lo que es lo mismo n de diferentes armónicos:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n a_i \cos(\omega_i \cdot t) + b_i \sin(\omega_i \cdot t) ; 0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n \leq \pi(1)$$

Siendo a_i y b_i variables aleatorias con²

¹ La expresión $a_{\omega} \cos(\omega \cdot t) + b_{\omega} \sin(\omega \cdot t)$ da lugar a una función periódica de periodo $\frac{2\pi}{\omega}$

² La estacionariedad de este proceso aleatorio puede seguirse en Contreras, D y Escolano J (1984): El análisis espectral como instrumento para detectar la estacionalidad. ESTADISTICA ESPAÑOLA Núm. 104, i 984, págs. 101 a 144

http://www.ine.es/revistas/estaespa/104_6.pdf

$$E(a_i) = E(b_i) = 0$$

$$E(a_i a_j) = E(b_i b_j) = \begin{cases} \sigma^2; & \text{si } i = j \\ 0; & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$E(a_i b_j) = 0 \quad \forall i, j$$

En este tipo de procesos la función de autocovarianza $\gamma(\tau)$ se obtiene:

$$\gamma(\tau) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \cos(\omega_i \cdot \tau)$$

En donde σ_i es la varianza del armónico i-ésimo, de manera que en

$$\gamma(0) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

se muestra que la varianza total del proceso es la suma de las

varianzas de cada armónico.

Series de Fourier y periodograma

Una **serie de Fourier** es una serie infinita que converge puntualmente a una función continua y periódica.

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n \cdot \omega_0 t) + b_n \sin(n \cdot \omega_0 t)$$

Donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ se denomina frecuencia fundamental; a_n y b_n se denominan

coeficientes de Fourier.

Los coeficientes de una serie de Fourier pueden calcularse gracias a la **ortogonalidad** de las funciones seno y coseno.

El periodograma recoge la contribución que tiene cada armónico a la hora de explicar la varianza de cada serie, y cada armónico está caracterizado por la frecuencia en que tienen lugar los ciclos. Los ciclos que tienen un elevado periodo (desde que tiene lugar un máximo al siguiente máximo) tendrán una baja frecuencia y viceversa.

Estimación del periodograma.

Consideremos la serie temporal X_t , de la que disponemos de un conjunto discreto y finito de observaciones T observaciones, generadas por un proceso aleatorio. Dado que se busca una representación de X_t en T observaciones, ajustamos los datos a un polígono trigonométrico que se asemeje a una serie de fourier, escogiendo ω_i como:

$$\omega_i = \frac{2\pi \cdot i}{T}$$

es decir

$$X_t = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{i=1}^k a_i \cos\left(i \cdot \frac{2\pi \cdot t}{T}\right) + b_i \sin\left(i \cdot \frac{2\pi \cdot t}{T}\right)$$

$$x_t = (X_t - \hat{\mu}) = \sum_{i=1}^k a_i \cos\left(i \cdot \frac{2\pi \cdot t}{T}\right) + b_i \sin\left(i \cdot \frac{2\pi \cdot t}{T}\right)^3$$

La forma habitual de obtener el periodograma, es estimar por mínimos cuadrados los coeficientes a_i y b_i para cada $k = T/2$ armónicos si el número de observaciones es par T o $k = (T-1)/2$ si es impar, en un modelo especificado de la siguiente forma:

$$x_t = a \cos \omega \cdot t + b \sin \omega \cdot t + v_t$$

En la que x_t sería la serie armónica; $\omega = \omega_p = \frac{2\pi \cdot p}{T}$; p indicaría el orden del armónico de $\frac{T}{2}$ ciclos; v_t es un residuo no explicado al que se puede considerar

³ nótese que $\frac{1}{2}a_0 = \frac{\sum_{i=1}^T X_t}{T}$, lo que implica que $a_0 = \frac{2}{T} \sum_{i=1}^T X_t$

irrelevante (caso determinístico) o que verifica las propiedades clásicas de la perturbación de los modelos econométricos.

El periodograma o estimador del espectro se obtendría entonces a partir de la

representación de $I(\omega_i) = \frac{T(a_p^2 + b_p^2)}{4\pi}$ frente a los p armónicos, en tanto que la

contribución de la varianza por cada armónico, sería $\frac{(a_p^2 + b_p^2)}{2}$.

Test sobre el periodograma

Una forma de contrastar la existencia de algún ciclo relevante en el periodograma de una serie temporal es el test de Fisher; estadístico g (Fisher; 1929) o relación entre la mayor varianza asociada a una determinada frecuencia (ω_i); y la varianza total de la serie.

$$g = \frac{\max |w_p|^2}{\frac{n}{2} \sum_{p=1}^{n/2} |w_p|^2}$$

Para probar la significación del periodo p se contrasta el estadístico g contra la z de una distribución normal (0;1); siendo la regla de decisión rechazar la hipótesis nula sobre un componente periódico en Y_t si la g calculada excede de la z de tabla en un nivel de significación del $100\alpha\%$.

La manera habitual de contrastar la existencia de algún ciclo en el periodograma de una serie temporal a través del estadístico es calculando:

$$G = \frac{\max S^2}{2S^2}$$

El ciclo es significativo si el valor G de esta relación es igual al valor crítico calculado según la siguiente fórmula:

$$G_c = 1 - e^{\frac{\ln(p) - \ln(m)}{m-1}}$$

Siendo $\ln(p)$ el logaritmo neperiano del nivel de probabilidad elegido y m el número total de datos de la serie (en series de más de 30 datos).

Una prueba para estudiar la dependencia serial (Durbin; 1969) en series de observaciones estacionarias y_1, \dots, y_T se realiza sobre la grafica del periodograma acumulado:

$$s_j = \frac{\sum_{r=1}^j p_r}{\sum_{r=1}^m p_r}$$

donde $r = 1, \dots, m$ es el periodograma ordinario:

$$p_r = \frac{2}{T} \left| \sum_{t=1}^T y_t e^{(2\pi i r t)/T} \right|^2$$

El periodograma p_j calculado para series y_1, \dots, y_T de variables independientes $N(\mu, \sigma^2)$; se calcula:

$$a_j = \sqrt{\frac{2}{T} \sum_{t=1}^T y_t \cos\left(\frac{2\pi j t}{T}\right)}; b_j = \sqrt{\frac{2}{T} \sum_{t=1}^T y_t \sin\left(\frac{2\pi j t}{T}\right)}; p_j = a_j^2 + b_j^2, \left(j = 1, \dots, \left[\frac{1}{2} T \right] \right),$$

donde $\left[\frac{1}{2} T \right] = \frac{1}{2} T$ para T y $\frac{1}{2} T - \frac{1}{2}$ para el extremo de T ; por simplicidad asumimos que el extremo de T es $T = 2m + 1$.

Y su representación gráfica de p_j contra j presenta una alta apariencia de irregularidad en su inspección visual. Por ello; una mejor manera de presentar la información de los p_j 's es hacerlo a través del gráfico del periodograma acumulado; s_j .

Se presupone que cuando y_1, \dots, y_T esta independientemente y normalmente distribuida; s_1, \dots, s_{m-1} se distribuye igual que el orden estadístico de $m-1$ muestras independientes de la distribución uniforme (0;1). Bartlett's (1954;1966; p 361) sugiere para probar la independencia serial; probar la

máxima discrepancia entre s_j y su expectativa; ie. j/m . Para una probar un exceso de bajas frecuencias relativas frente a altas frecuencias; que equivaldría a la expectativa de presencia de correlación serial positiva este enfoque conduce al estadístico:

$$c^+ = \max_j \left(s_j - \frac{j}{m} \right)$$

Por el contrario un test contra excesos de variaciones de alta frecuencia el estadístico apropiado es:

$$c^- = \max_j \left(\frac{j}{m} - s_j \right)$$

El estadístico que corresponde a las dos partes de la prueba sería:

$$c = \max_j \left| s_j - \frac{j}{m} \right| = \max(c^+, c^-)$$

Este estadístico esta estrechamente relacionado con el de Kolmogorov-Smirnov D_n^+, D_n^-, D_n y su forma modificada C_n^+, C_n^-, C_n considerado por Pyke (1959) y Brunk (1962). Por ejemplo; $D_n^- = \max_j \{s_j - (j-1)/(m-1)\}$ y $C_n^- = c^+$.

Los valores críticos para estos estadísticos están dado en la Tabla nº1. Si deseamos probar el test de un exceso de bajas frecuencias frente a las altas frecuencias; entonces el valor obtenido en la tabla c_0 es el valor crítico apropiado al valor de c^+ ; se dibujaría en el gráfico la línea; $y = c_0 + j/m$ y la trayectoria que muestra s_j ; obteniendo los valores que sobrepasan la línea $(j/m, s_j)$. Si s_j cruza la línea; se rechaza la hipótesis de independencia serial. De igual manera; un test sobre al exceso de altas frecuencias frente a las bajas frecuencias se rechaza si el trayectoria de s_j cruza la línea $y = -c_0 + j/m$.

Table 1. Significance values for c^+ and c (also for C_n^+ and C)

$\text{pr}(c^+ > \text{tabled value}) = \text{pr}(C_n^+ > \text{tabled value}) = \alpha$; $\text{pr}(c > \text{tabled value}) = \text{pr}(C > \text{tabled value}) \simeq 2\alpha$.

α					α						
n	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	n	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.40000	0.45000	0.47500	0.49000	0.49500	41	0.14916	0.17215	0.19254	0.21667	.233310
2	.35044	.44306	.50855	.56667	.59596	42	.14761	.17034	.19050	.21436	.23081
3	.35477	.41811	.46702	.53456	.57900	43	.14611	.16858	.18852	.21212	.22839
4	.33435	.39075	.44641	.50495	.54210	44	.14466	.16688	.18661	.20995	.22605
5	.31556	.37359	.42174	.47692	.51576	45	.14325	.16524	.18475	.20785	.22377
6	.30244	.35522	.40045	.45440	.48988	46	.14188	.16364	.18295	.20581	.22157
7	.28991	.33905	.38294	.43337	.46761	47	.14055	.16208	.18120	.20383	.21943
8	.27828	.32538	.36697	.41522	.44819	48	.13926	.16058	.17950	.20190	.21735
9	.26794	.31325	.35277	.39922	.43071	49	.13800	.15911	.17785	.20003	.21534
10	.25884	.30221	.34022	.38481	.41517	50	.13678	.15769	.17624	.19822	.21337
11	.25071	.29227	.32894	.37187	.40122	51	.13559	.15630	.17468	.19645	.21146
12	.24325	.28330	.31869	.36019	.38856	52	.13443	.15495	.17316	.19473	.20961
13	.23639	.27515	.30935	.34954	.37703	53	.13330	.15363	.17168	.19305	.20780
14	.23010	.26767	.30081	.33980	.36649	54	.13221	.15235	.17024	.19142	.20604
15	.22430	.26077	.29296	.33083	.35679	55	.13113	.15110	.16884	.18983	.20432
16	.21895	.25439	.28570	.32256	.34784	56	.13009	.14989	.16746	.18828	.20265
17	.21397	.24847	.27897	.31489	.33953	57	.12907	.14870	.16613	.18677	.20101
18	.20933	.24296	.27270	.30775	.33181	58	.12807	.14754	.16482	.18529	.19942
19	.20498	.23781	.26685	.30108	.32459	59	.12710	.14641	.16355	.18385	.19786
20	.20089	.23298	.26137	.29484	.31784	60	.12615	.14530	.16230	.18245	.19635
21	.19705	.22844	.25622	.28898	.31149	62	.12431	.14316	.15990	.17973	.19341
22	.19343	.22416	.25136	.28346	.30552	64	.12255	.14112	.15760	.17713	.19061
23	.19001	.22012	.24679	.27825	.29989	66	.12087	.13916	.15540	.17464	.18792
24	.18677	.21630	.24245	.27333	.29456	68	.11926	.13728	.15329	.17226	.18535
25	.18370	.21268	.23835	.26866	.28951	70	.11771	.13548	.15127	.16997	.18288
26	.18077	.20924	.23445	.26423	.28472	72	.11622	.13375	.14932	.16777	.18051
27	.17799	.20596	.23074	.26001	.28016	74	.11479	.13208	.14745	.16566	.17823
28	.17533	.20283	.22721	.25600	.27582	76	.11341	.13048	.14565	.16363	.17604
29	.17280	.19985	.22383	.25217	.27168	78	.11208	.12894	.14392	.16167	.17392
30	.17037	.19700	.22061	.24851	.26772	80	.11079	.12745	.14224	.15978	.17188
31	.16805	.19427	.21752	.24501	.26393	82	.10955	.12601	.14063	.15795	.16992
32	.16582	.19166	.21457	.24165	.26030	84	.10835	.12462	.13907	.15619	.16802
33	.16368	.18915	.21173	.23843	.25683	86	.10719	.12327	.13756	.15449	.16618
34	.16162	.18674	.20901	.23534	.25348	88	.10607	.12197	.13610	.15284	.16440
35	.15964	.18442	.20639	.23237	.25027	90	.10499	.12071	.13468	.15124	.16268
36	.15774	.18218	.20387	.22951	.24718	92	.10393	.11949	.13331	.14970	.16101
37	.15590	.18003	.20144	.22676	.24421	94	.10291	.11831	.13198	.14820	.15940
38	.15413	.17796	.19910	.22410	.24134	96	.10192	.11716	.13070	.14674	.15783
39	.15242	.17595	.19684	.22154	.23857	98	.10096	.11604	.12944	.14533	.15631
40	.15076	.17402	.19465	.21906	.23589	100	.10002	.11496	.12823	.14396	.15483

Teorema de Paserval

Sea f una función continua en el intervalo $[-\pi, \pi]$ de periodo 2π ; con desarrollo de Fourier de f :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

donde los coeficientes c_n han sido obtenidos a partir de los coeficientes a_n, b_n .

Entonces se verifica que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

Particularizando a la serie función periódica $f(t)$, con periodo $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$:

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} a_p \cos(p \cdot \omega_0 t) + b_p \sin(p \cdot \omega_0 t)$$

La identidad de Parseval quedaría:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t)]^2 = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{p=1}^{\infty} a_p^2 + b_p^2$$

Las series temporales no son consideradas funciones continuas como tal; sino muestras de señales continuas tomadas a una misma distancia temporal a partir de un valor inicial Y_0 y siendo T el tamaño de la serie. De acuerdo a lo anterior; en la función periódica $f(t)$ la potencia promedio está dada por:

$$\frac{1}{T} \int_{T/2}^{-T/2} [f(t)]^2 = \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{T/2} (a_p^2 + b_p^2)$$

que muestra así que el periodograma estudia de hecho la distribución de la varianza o potencia de la serie en función de los diversos armónicos:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{k-1} (a_p^2 + b_p^2) + a_{T/2}^2, k = T/2$$

Teorema de Plancharel

Sean $A(x)$ y $B(x)$ dos funciones continuas de periodo 2π cuyos desarrollos de Fourier son

$$A(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$$

y

$$B(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{inx}$$

Entonces se verifica la relación de Plancharel entre los correspondientes productos escalares:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(x)B(x)dx$$

Si $A(x) = B(x)$ se obtiene la identidad de Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A(x)|^2 dx$$

De igual manera que la identidad de Parseval estudia la distribución de la varianza de una serie desarrollada en sus armónicos, la de Plancharel estudia la covarianza entre dos series desarrolladas en sus armónicos.

Partiendo de una serie armónica $x_t = \sum_{p=1}^k (a_p \cos p\omega_0 t + b_p \sin p\omega_0 t)$ y otra

definida como $y_t = \sum_{p=1}^k (a_p^* \cos p\omega_0 t + b_p^* \sin p\omega_0 t)$, en donde $k = T/2$ armónicos si

el número de observaciones es par T o $k = (T-1)/2$ si es impar, la expresión de

la igualdad de Plancharel sería:

$$\frac{1}{T} \int_{T/2}^{-T/2} y_t x_t = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{T/2} (a_p^* a_p + b_p^* b_p)$$

que muestra la distribución de la covarianza en función de los diversos armónicos:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{k-1} (a_p^* a_p + b_p^* b_p) + a_{T/2}^* a_{T/2}, k = T/2$$

Dado que la covarianza entre las series armónicas x_t e y_t se desarrolla a partir de los coeficientes de Fourier, cabe considerar a cada expresión $\frac{(a_p a_p^* + b_p b_p^*)}{2}$ como la contribución del armónico p a la formación de la covarianza, de manera que la representación de $C_{xz}(w_p) = \frac{T(a_p a_p^* + b_p b_p^*)}{4\pi}$ frente a los p armónicos permite apreciar las frecuencias entre las que las series x_t y y_t covarían y su sentido positivo o negativo. Se puede observar que un ciclo relevante en ambas series originará un valor alto en $C_{xz}(w_p)$, en tanto que un ciclo poco relevante en alguna de las dos series dará lugar a un valor bajo en $C_{xz}(w_p)$ ⁴.

⁴ El producto escalar de x_t por y_t

$$\sum_{t=1}^T x_t \cdot y_t = \sum_{t=1}^T \left[\sum_{p=1}^k (a_p \cos p\omega_0 t + b_p \sin p\omega_0 t) (a_p^* \cos p\omega_0 t + b_p^* \sin p\omega_0 t) \right]$$

equivale a $\frac{T}{2} \sum_{p=1}^k \frac{(a_p a_p^* + b_p b_p^*)}{2}$, debido a la ortogonalidad de las funciones seno y coseno.

Dado que $\sum_{t=1}^T \cos(p\omega_0 t) = 0$ y $\sum_{t=1}^T \sin(p\omega_0 t) = 0$ siendo $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

Utilizando las identidades trigonométricas $\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)]$,

$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [-\cos(A+B) + \cos(A-B)]$, $\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \sin(A-B)]$,

$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta)$ y $\cos^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta)$

Se llega a que

Por otro lado, si utilizamos la definición alternativa de las series de fourier:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n), \text{ tenemos que } x(t) = C_0 + \sum_{p=1}^k C_p \cos(p\omega_0 t - \theta_p) \text{ e}$$

$$y(t) = C_0^* + \sum_{p=1}^k C_p^* \cos(p\omega_0 t - \theta_p^*), \text{ en donde } C_o = a_0/2, C_p = \sqrt{a_p^2 + b_p^2} \text{ y,}$$

$$\theta_p = \arctan\left(\frac{b_p}{a_p}\right), C_0^* = a_0^*/2, C_p^* = \sqrt{(a_p^*)^2 + (b_p^*)^2} \text{ y, } \theta_p^* = \arctan\left(\frac{b_p^*}{a_p^*}\right).$$

Se aprecia entonces que en cada armónico p , θ_p determinara el ángulo de desfase en radianes de cada serie de fourier, si queremos obtener el desfase en unidades de tiempo, hay que dividirlo por la frecuencia fundamental ,

$$\omega_o : \frac{\theta_p}{\omega_o}. \text{ Entonces la diferencia } \frac{\theta_p}{\omega_o} - \frac{\theta_p^*}{\omega_o} = \frac{\theta_p - \theta_p^*}{\omega_o}, \text{ determinara el desfase entre}$$

los armónicos p de las dos series.

Coefficiente de correlación de Pearson

El coeficiente de correlación de pearson se obtendría a partir de:

$$\rho_{xy}(0) \approx \frac{\sum_{p=1}^k (a_p a_p^* + b_p b_p^*)}{\sqrt{\left(\sum_{p=1}^k (a_p^2 + b_p^2)\right) \cdot \left(\sum_{p=1}^k (a_p^{*2} + b_p^{*2})\right)}}$$

Varianza y Covarianza de Procesos Estacionarios

Se define un proceso es estacionario coma aquel que su media es constante e independiente del tiempo, su varianza es finita y constante, y el valor de la

$$\sum_{t=1}^T \cos^2 p\omega_0 t = T/2, \sum_{t=1}^T \sin^2 p\omega_0 t = T/2, \text{ y } \sum_{t=1}^T \cos m\omega_0 t \sin n\omega_0 t = 0 \text{ y}$$

$$\sum_{t=1}^T \sin m\omega_0 t \sin n\omega_0 t = 0 \text{ y } \sum_{t=1}^T \cos m\omega_0 t \cos n\omega_0 t = 0$$

covarianza entre dos periodos no depende del tiempo en el cual se ha calculado, sino de la distancia o desfase entre aquellos.

Pero, ¿por qué resulta importante para el investigador que el proceso analizado sea estacionario? La razón fundamental es que el modelos de regresión de series temporales están diseñados para ser utilizados con procesos estacionarios. Si las características del proceso cambian a lo largo del tiempo, resultará difícil representar la serie para intervalos de tiempo pasados y futuros mediante un modelo lineal sencillo. Sin embargo, por regla general, las series económicas no son series que procedan de procesos estacionarios, sino que suelen tener una tendencia, ya sea creciente o decreciente, y variabilidad no constante. Si bien, dicha limitación en la práctica no es tan importante porque las series no estacionarias se pueden transformar en otras que sí lo son, ya que la mayor parte de las series económicas se convierten en aproximadamente estacionarias después de aplicar diferencias en una ó más etapas.

Tanto la varianza muestral como la covarianza muestral, se desarrollan según los teoremas de Parseval y Plancharel, en:

$$\sigma_x^2 = \sum_{p=1}^{T/2} \frac{(a_p^2 + b_p^2)}{2} \text{ y } \sigma_{x_t, y_t} = \sum_{p=1}^{T/2} \frac{(a_p^* a_p + b_p^* b_p)}{2},$$

La multiplicación punto a punto de x_t e y_t da lugar a la serie :

$$y_t \cdot x_t = \sum_{p=1}^{T/2} \frac{(a_p^* a_p + b_p^* b_p)}{2} + \sum_{p=1}^{T/2} (a_p' \cos p\omega_0 t + b_p' \sin p\omega_0 t) = \sigma_{xy} + z_t$$

de igual manera que el cuadrado de x_t da lugar a la serie :

$$x_t \cdot x_t = \sum_{p=1}^{T/2} \frac{(a_p^2 + b_p^2)}{2} + \sum_{p=1}^{T/2} (a_p' \cos p\omega_0 t + b_p' \sin p\omega_0 t) = \sigma_x^2 + z_t$$

Dado que $\frac{\sum_{t=1}^T z_t}{T} = 0$, entonces el producto escalar de x_t e y_t y x_t por x_t , da lugar a T veces la covarianza poblacional y T veces la varianza poblacional.

Cuando los procesos son estacionarios, las covarianzas y varianzas muestrales han de coincidir con la poblacional, dado que ambas se consideran finitas y constantes, e independientes de los periodos de tiempo utilizados en su cálculo. En cuyo caso el coeficiente de correlación de Pearson es un estimador eficiente en la regresión de una serie sobre la otra.

La coincidencia entre las covarianzas y varianzas muestrales con la poblacional, implica que el proceso de fourier $z_t = \sum_{p=1}^{T/2} (a'_p \cos p\omega_0 t + b'_p \sin p\omega_0 t)$ del producto x_t e y_t y del cuadrado de x_t da lugar a un conjunto de observaciones estacionarias z_1, \dots, z_T , de media cero y serialmente independientes. Una manera de testearlo es utilizar el test de Durbin que se explicó más arriba.

Ejemplo 1

Partimos de los datos de la tabla nº1.

Tabla nº1 Consumo de Energía Final Eléctrica (TEP) y PIB (Mill de euros constantes) de España correspondientes al periodo 1992-2010

	Consumo de Energía Final Eléctrica (TEP)	PIB (Mill euros año 2000)	$X_t = \ln(\text{TEP})$	$Y_t = \ln(\text{PIB})$	x_t	y_t
1992	11244	484581	9,3276	13,0910	-0,3311	-0,2293
1993	11237	479583	9,3270	13,0807	-0,3317	-0,2397
1994	11777	491012	9,3739	13,1042	-0,2848	-0,2162
1995	12116	515405	9,4023	13,1527	-0,2564	-0,1677
1996	12655	527862	9,4458	13,1766	-0,2129	-0,1438
1997	13672	548284	9,5231	13,2145	-0,1356	-0,1058
1998	14202	572782	9,5611	13,2583	-0,0975	-0,0621
1999	15241	599966	9,6317	13,3046	-0,0269	-0,0158
2000	16205	630263	9,6931	13,3539	0,0344	0,0335
2001	17279	653255	9,7572	13,3897	0,0986	0,0693
2002	17759	670920	9,7846	13,4164	0,1260	0,0960
2003	18916	691695	9,8478	13,4469	0,1891	0,1265
2004	19834	714291	9,8952	13,4790	0,2365	0,1587
2005	20827	740108	9,9440	13,5146	0,2853	0,1942
2006	22052	769850	10,0012	13,5540	0,3425	0,2336
2007	22548	797367	10,0234	13,5891	0,3647	0,2687

El desarrollo de Fourier del logaritmo ambas series es el que figura en la tabla adjunta:

Frecuencia	Periodo	a_p	b_p	Periodograma
1	16	0,0381	-0,1883	0,4638
2	8	0,0439	-0,0767	0,0982
3	5,3333	0,0390	-0,0522	0,0534
4	4	0,0367	-0,0290	0,0275
5	3,2	0,0337	-0,0180	0,0183
6	2,6667	0,0296	-0,0121	0,0128
7	2,2857	0,0314	-0,0071	0,0130
8	2	0,0162	0,0000	0,0033

Frecuencia	Periodo	a _p	b _p	Periodograma
1	16	0,0586	-0,2688	0,9509
2	8	0,0580	-0,1119	0,1995
3	5,3333	0,0489	-0,0714	0,0942
4	4	0,0442	-0,0449	0,0499
5	3,2	0,0507	-0,0323	0,0454
6	2,6667	0,0433	-0,0161	0,0268
7	2,2857	0,0377	-0,0069	0,0184
8	2	0,0234	0,0000	0,0069

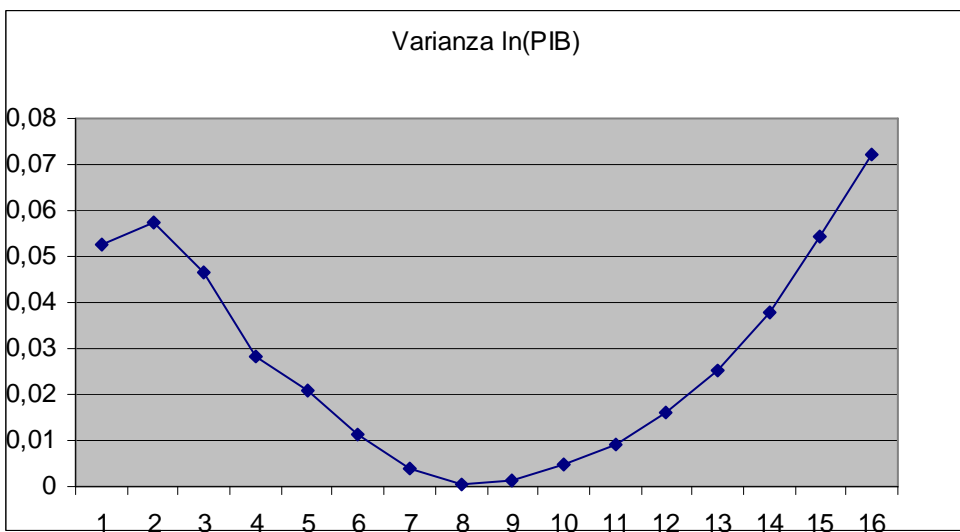
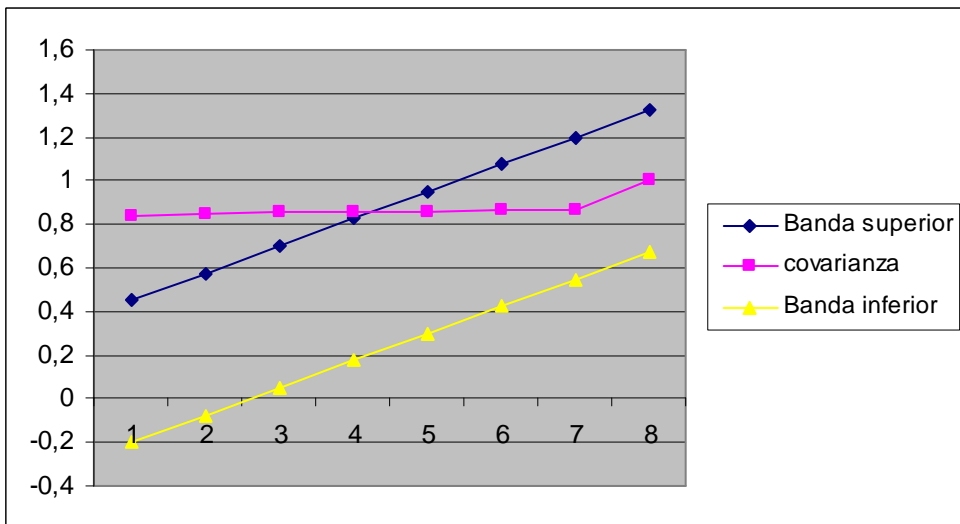
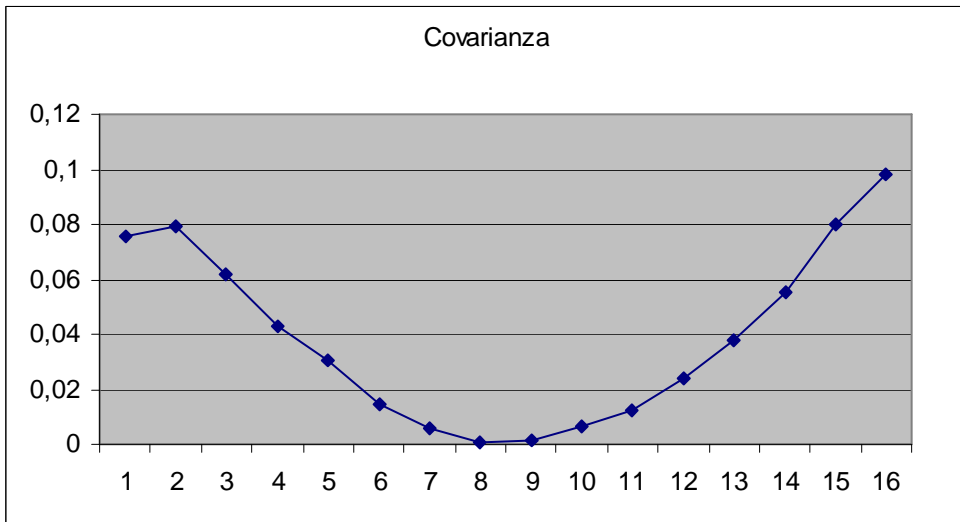
Los desarrollos de las covarianzas y varianzas de dichas series en coeficientes de fourier se muestran a continuación⁵:

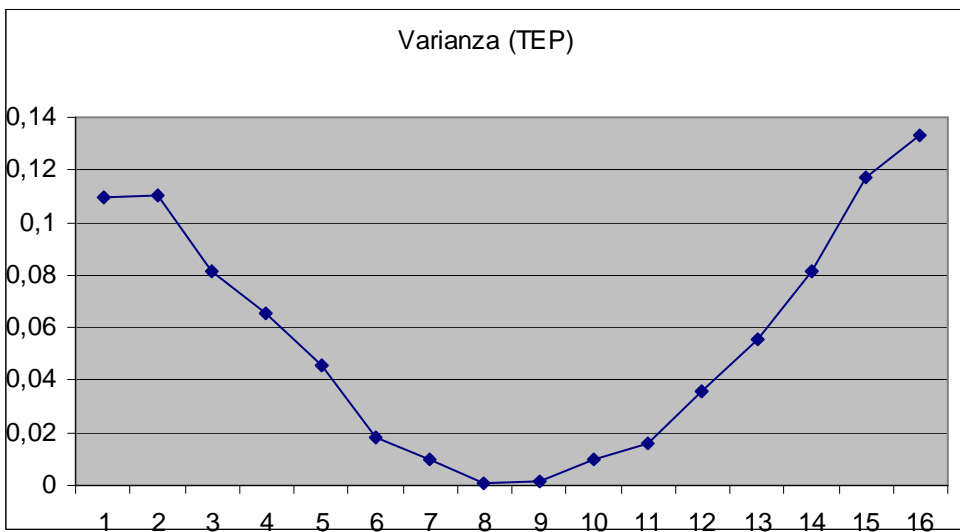
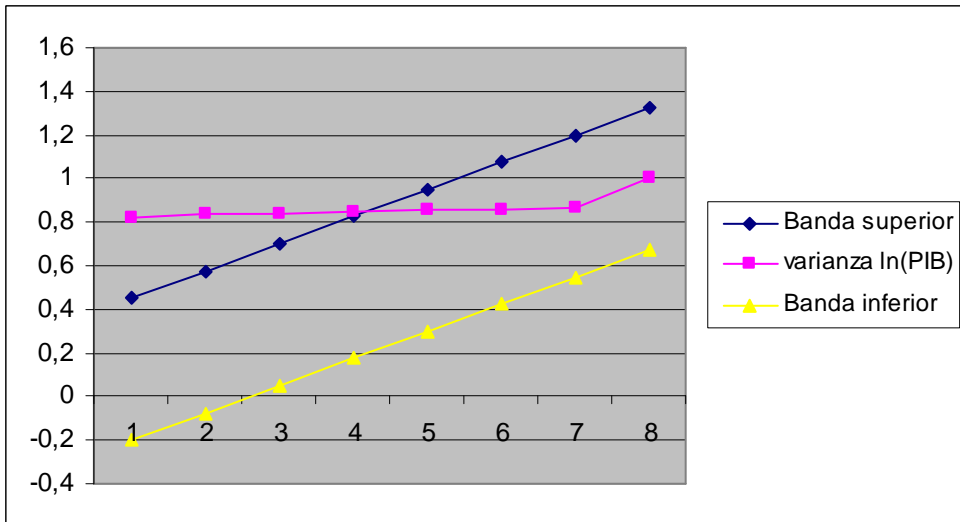
	Covarianza		Varianza ln(PIB)		Varianza ln(TEP)	
	a _p	b _p	a _p	b _p	a _p	b _p
0	0,0391	0,0000	0,0276	0,0000	0,0557	0,0000
1	0,0421	0,0101	0,0298	0,0077	0,0596	0,0134
2	0,0058	0,0018	0,0045	0,0021	0,0075	0,0007
3	0,0027	-0,0015	0,0020	-0,0007	0,0037	-0,0030
4	0,0012	-0,0018	0,0007	-0,0018	0,0020	-0,0015
5	0,0015	-0,0023	0,0020	-0,0023	0,0005	-0,0021
6	0,0021	-0,0024	0,0026	-0,0012	0,0005	-0,0043
7	0,0024	-0,0002	0,0022	0,0000	0,0024	-0,0007
8	0,0010	0,0000	0,0009	0,0000	0,0012	0,0000

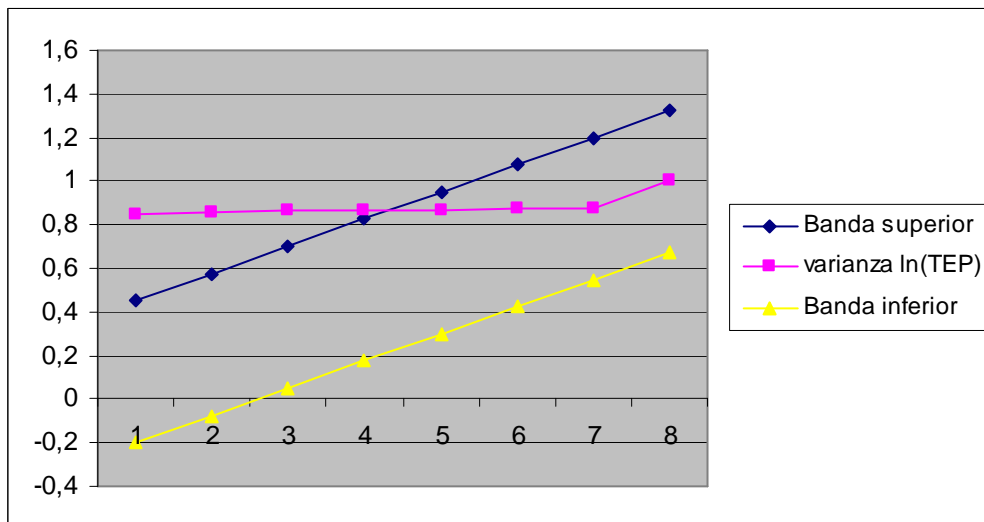
La covarianza de las dos series sería en consecuencia $\sigma_{x,y_t} = 0,039147043$, la varianza de ln(PIB) sería $\sigma_{x_t} = 0,02760399$ y $\sigma_{y_t} = 0,05566181$ sería la varianza de ln(TEP).

La serie armónica asociada a las multiplicaciones y cuadrados ambas series en diferencias sobre sus medias, tiene en todos los casos un periodograma en donde sobresalen los ciclos de baja frecuencia, tal y como muestra el test de Durbín que se representa de forma gráfica junto a la serie:

⁵ Si dividimos la cov(y,x) entre la var(x), asumiendo que ambas han sido generadas por un proceso de Fourier no estacionario, la división de la covarianza y varianza, tiene solución única si se admite la independencia entre la covarianza y la varianza. La serie de Fourier resultante de la división sería una función lineal de los coeficientes de Fourier de la covarianza y varianza, cuyo primer coeficiente sería el coeficiente de regresión.







Dado que no se trata de series estacionarias el coeficiente de correlación de correlación de Pearson calculado con los datos muestrales no asegura la estabilidad de la estimación eficiente a través del coeficiente de correlación. Sin embargo, esta regresión planteada en primeras diferencias logarítmicas, o tasas de crecimiento si que garantiza una regresión estable, ya que tanto las varianzas como las covarianzas de las series son estacionarias:

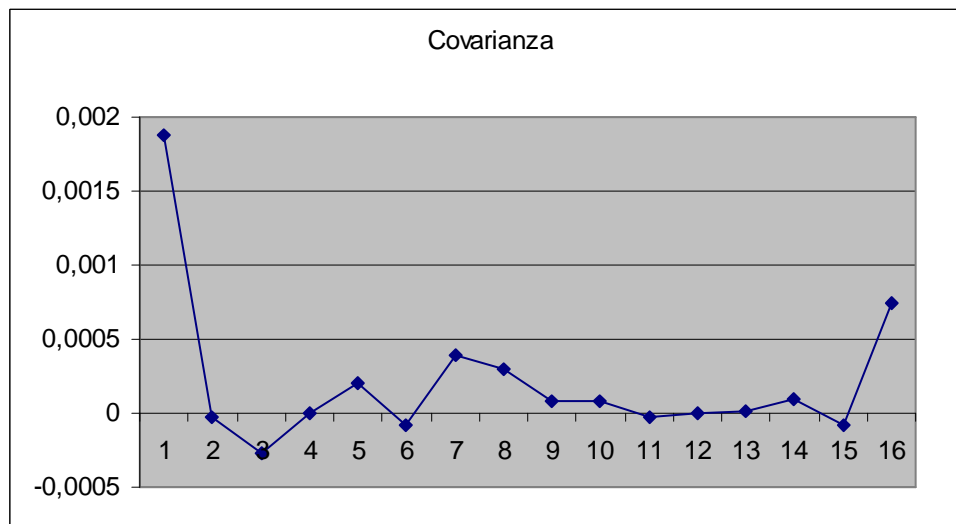
Tabla nº2 Consumo de Energía Final Eléctrica (TEP) y PIB (Mill de euros constantes) de España correspondientes al periodo 1992-2010, en diferencias logarítmicas.

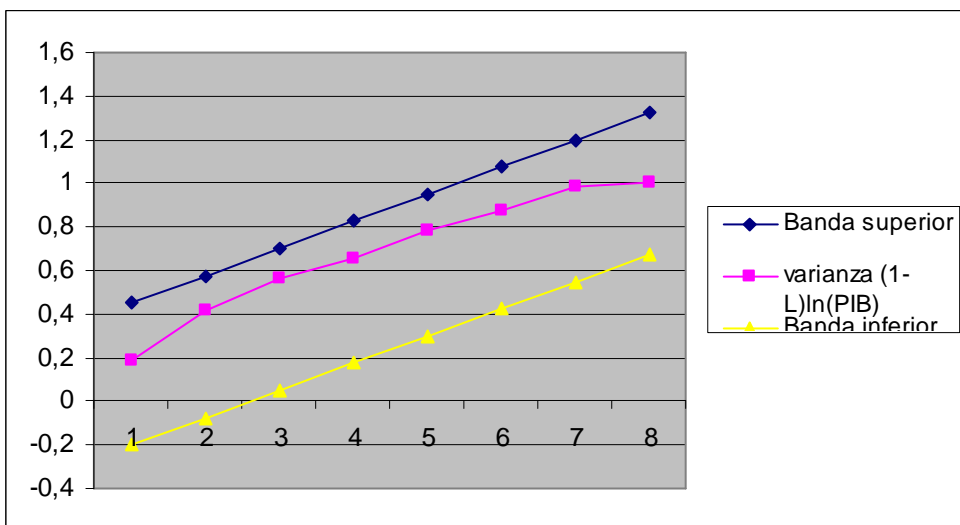
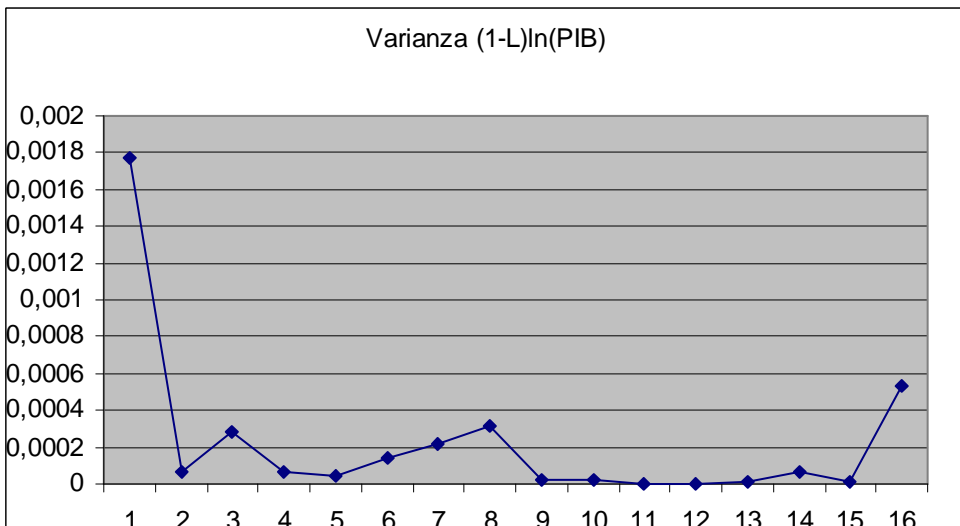
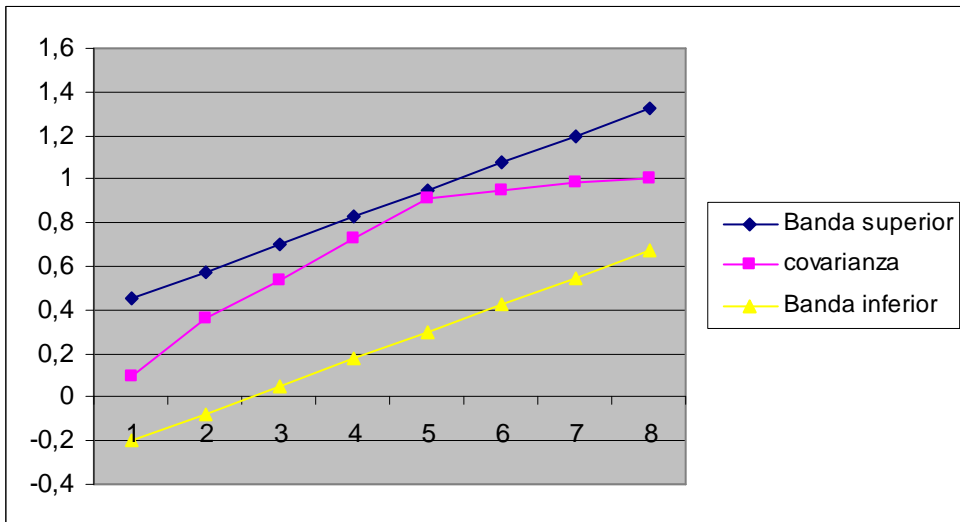
	Consumo de Energía Final Eléctrica (TEP)	PIB (Mill euros año 2000)	$X_t = \ln(\text{TEP}) - \ln(\text{TEP})_{-1}$	$Y_t = \ln(\text{PIB}) - \ln(\text{PIB})_{-1}$	x_t	y_t
1992	11244	484581	-0,0006	-0,0104	-0,0449	-0,0420
1993	11237	479583	0,0469	0,0236	0,0027	-0,0081
1994	11777	491012	0,0284	0,0485	-0,0159	0,0168
1995	12116	515405	0,0435	0,0239	-0,0007	-0,0078
1996	12655	527862	0,0773	0,0380	0,0331	0,0063
1997	13672	548284	0,0380	0,0437	-0,0062	0,0121
1998	14202	572782	0,0706	0,0464	0,0264	0,0147
1999	15241	599966	0,0613	0,0493	0,0171	0,0176
2000	16205	630263	0,0642	0,0358	0,0199	0,0042
2001	17279	653255	0,0274	0,0267	-0,0168	-0,0050
2002	17759	670920	0,0631	0,0305	0,0189	-0,0012
2003	18916	691695	0,0474	0,0321	0,0032	0,0005
2004	19834	714291	0,0489	0,0355	0,0046	0,0038
2005	20827	740108	0,0572	0,0394	0,0129	0,0077
2006	22052	769850	0,0222	0,0351	-0,0220	0,0035
2007	22548	797367	0,0119	0,0086	-0,0324	-0,0231

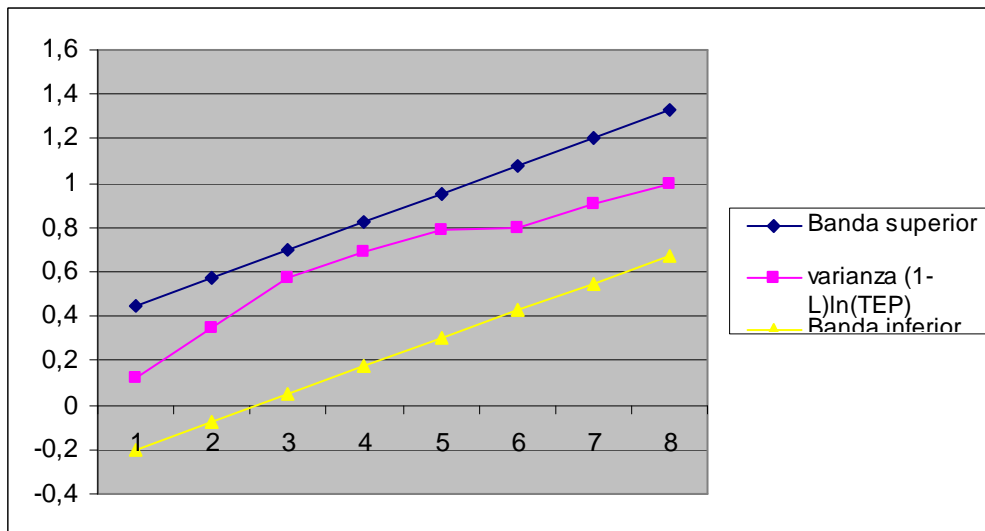
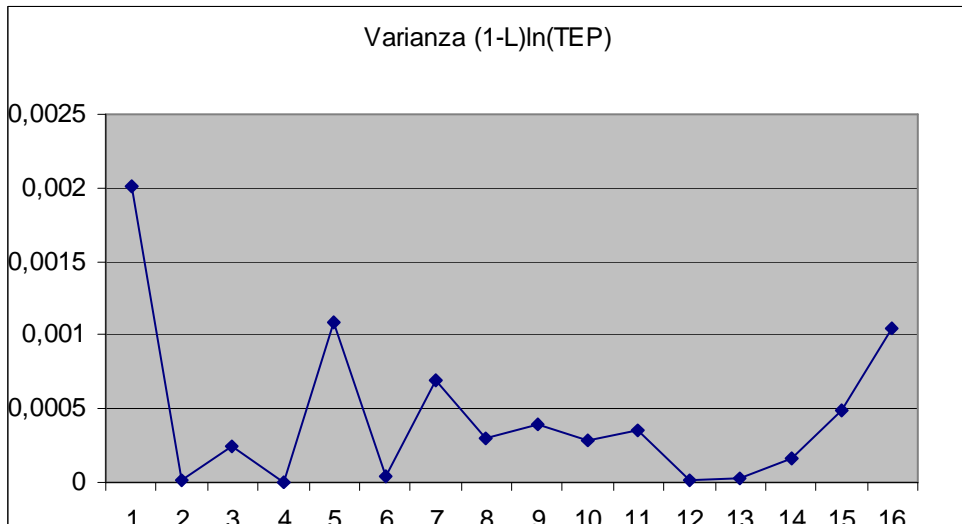
Frecuencia	Periodo	a_p	b_p	Periodograma
1	16	-0,0116	-0,0002	0,0017
2	8	-0,0038	-0,0086	0,0011
3	5,3333	-0,0090	-0,0039	0,0012
4	4	-0,0024	-0,0077	0,0008
5	3,2	0,0001	-0,0062	0,0005
6	2,6667	0,0042	-0,0004	0,0002
7	2,2857	0,0001	0,0016	0,0000
8	2	-0,0008	0,0000	0,0000

Frecuencia	Periodo	a_p	b_p	Periodograma
1	16	-0,0189	-0,0020	0,0045
2	8	-0,0076	-0,0083	0,0016
3	5,3333	-0,0077	-0,0011	0,0008
4	4	-0,0007	0,0007	0,0000
5	3,2	-0,0115	-0,0021	0,0017
6	2,6667	0,0032	-0,0030	0,0002
7	2,2857	0,0133	-0,0011	0,0022
8	2	-0,0025	0,0000	0,0001

	Covarianza		Varianza (1-L)ln(PIB)		Varianza (1-L)ln(TEP)	
	a_p	b_p	a_p	b_p	a_p	b_p
0	0,0391	0,0586	0,0276	0,0000	0,0557	0,0000
1	0,0421	0,0580	0,0298	0,0077	0,0596	0,0134
2	0,0058	0,0489	0,0045	0,0021	0,0075	0,0007
3	0,0027	0,0442	0,0020	-0,0007	0,0037	-0,0030
4	0,0012	0,0507	0,0007	-0,0018	0,0020	-0,0015
5	0,0015	0,0433	0,0020	-0,0023	0,0005	-0,0021
6	0,0021	0,0377	0,0026	-0,0012	0,0005	-0,0043
7	0,0024	0,0234	0,0022	0,0000	0,0024	-0,0007
8	0,0010	0,0000	0,0009	-0,0125	0,0012	-0,0235







El coeficiente de regresión lineal

El coeficiente de regresión mínimo-cuadrático de la estimación: $y_t = bx_t + e_t$ con datos centrados es el siguiente:

$$\hat{b}_{MVCO} = \frac{\sum x_t \cdot y_t}{\sum x_t^2}$$

La multiplicación escalar de dos series de media cero da como resultado:

$$y_t \cdot x_t = \sigma_{xy} + \sum_{p=1}^k (a_p' \cos p\omega_0 t + b_p' \sin p\omega_0 t) = \sigma_{xy} + z_t$$

donde $\sigma_{xy} = \sum_{p=1}^{k-1} \left(\frac{a_p^* a_p + b_p^* b_p}{2} \right) + a_{T/2}^* a_{T/2}$ sería la covarianza cruzada, en tanto que

a_p' y b_p' serían combinaciones lineales de los coeficientes de Fourier de x_t e y_t .

$$\sum_{t=1}^T y_t \cdot x_t = T \cdot \sigma_{xy} + \sum_{t=1}^T z_t = T \sigma_{xy}$$

De igual manera la multiplicación escalar de x_t por x_t , da como resultado

$$\sum_{t=1}^T x_t \cdot x_t = T \cdot \sigma_x^e + \sum_{t=1}^T z_t = T \sigma_x^2, \text{ siendo}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{q-1} (a_p^2 + b_p^2) + a_{T/2}^2$$

En consecuencia

$$\hat{b}_{MCO} \cong \frac{\sum_{p=1}^{k-1} (a_p a_p^* + b_p b_p^*) + 2 \cdot a_{T/2} a_{T/2}^*}{\sum_{p=1}^{k-1} (a_p^2 + b_p^2) + 2a_{T/2}^2}$$

El error mínimo-cuadrático \hat{e}_t , se calcularía como:

$$y_t - \hat{y}_t = y_t - \hat{b}_{MCO} x_t = y_t - \frac{\sum_{p=1}^{k-1} (a_p a_p^* + b_p b_p^*) + 2 \cdot a_{T/2} a_{T/2}^*}{\sum_{p=1}^{k-1} (a_p^2 + b_p^2) + 2a_{T/2}^2} x_t$$

En términos de frecuencia:

$$\hat{e}_t = y_t - \hat{y}_t = \sum_{p=1}^k (a_p \cos p\omega_0 t + b_p \sin p\omega_0 t) - \hat{b}_{MCO} \sum_{p=1}^k (a_p^* \cos p\omega_0 t + b_p^* \sin p\omega_0 t) =$$

$$\sum_{p=1}^k \left((a_p - \hat{b}_{MCO} a_p^*) \cos p\omega_0 t + (b_p - \hat{b}_{MCO} b_p^*) \sin p\omega_0 t \right)$$

Y la suma cuadrática de los errores de regresión (SCR):

$$SCR = \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t)^2 = n \left(\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{k-1} (a_p^{*2} + b_p^{*2}) + 2a_{T/2}^{*2} - \frac{\left(\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{k-1} (a_p a_p^* + b_p b_p^*) + 2 \cdot a_{T/2} a_{T/2}^* \right)^2}{\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{k-1} (a_p^2 + b_p^2) + 2a_{T/2}^2} \right)$$

Considerando ahora las series aperiódicas, es decir series que no se pueden describir exclusivamente por los $\frac{T}{2}$ armónicos, en estos casos el periodograma es definido como

$$\hat{f}_x(\theta_k) = |w_k x|^2$$

siendo w_k el vector fila:

$$w_k = (1, e^{i\theta_k}, e^{2i\theta_k}, \dots, e^{(T-1)i\theta_k})$$

donde $\theta_k = 2\pi k/T$, y $t=0,1,\dots,T-1$, $w_k x / \sqrt{T}$ sería el elemento k-esimo de la transformada finita de Fourier del vector columna de x_t

y el cross-periodograma entre las series x_t e y_t

$$\hat{f}_{xy}(\theta_k) = (w_k x)^* (w_k y)$$

Donde * es la compleja conjugada de la transpuesta.

Hannan (1963) y Engle (1972) formularon el estimador minimo-cuadrático en términos del periodograma:

$$\hat{\beta} = \left[\sum_{k=0}^{T-1} \hat{f}_{xx}(\theta_k) \right]^{-1} \sum_{k=0}^{T-1} \hat{f}_{xy}(\theta_k)$$

donde $\hat{f}_{xx}(\theta_k)$ es la matriz del cross-periodograma de x_t .

Ejemplo

En la tabla nº 2 figuran las cifras de Consumo de energía final eléctrica (TEP) y del PIB en Millones de euros de España en el periodo 1992 y 2007. Transformando estas cifras en logaritmos y tomadas como diferencia sobre la media, obtenemos las series x_t (PIB) y y_t (Consumo Energía) con las que vamos a realizar el ejemplo:

Tabla nº 4 Consumo de energía final eléctrica (TEP) y del PIB en Millones de euros de España de 2000. Logaritmos y diferencias sobre los valores medios.

	Consumo de Energía Final Eléctrica (TEP)	PIB (Mill euros año 2000)
1992	-0,33109697	-0,22934853
1993	-0,33171972	-0,23971532
1994	-0,28478315	-0,21616517
1995	-0,25640473	-0,16767993
1996	-0,21287923	-0,14379728
1997	-0,13558168	-0,10583989
1998	-0,09754883	-0,06212773
1999	-0,02694246	-0,01576027
2000	0,03438821	0,03350427
2001	0,09856026	0,06933463
2002	0,1259608	0,09601758
2003	0,1890765	0,12651175
2004	0,23646601	0,1586578
2005	0,28531859	0,1941632

2006	0,34247167	0,23356303
2007	0,36471474	0,26868187

La regresión Mínimo Cuadrática de ambas series ofrece los siguientes resultados:

Tabla nº 5. Resultados de la regresión MCO entre el Consumo de energía final eléctrica (TEP) y del PIB en Millones de euros de España de 2000. Logaritmos.

Resumen

<i>Estadísticas de la regresión</i>	
Coefficiente de correlación múltiple	0,9986985
Coefficiente de determinación R ²	0,99739868
R ² ajustado	0,93073202
Error típico	0,01242767
Observaciones	16

ANÁLISIS DE VARIANZA

	<i>Grados de libertad</i>	<i>Suma de cuadrados</i>	<i>Promedio de los cuadrados</i>	<i>F</i>	<i>Valor crítico de F</i>
Regresión	1	0,88827222	0,88827222	5751,31267	1,0441E-19
Residuos	15	0,0023167	0,00015445		
Total	16	0,89058893			

	<i>Coefficientes</i>	<i>Error típico</i>	<i>Estadístico t</i>	<i>Probabilidad</i>	<i>Inferior 95%</i>	<i>Superior 95%</i>
Intercepción	0	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A
PIB (Mill euros año 2000)	1,41816621	0,01870009	75,8374094	8,3389E-21	1,37830792	1,4580245

El periodograma del PIB sería:

Tabla nº 6. Periodograma del PIB en Millones de euros de España de 2000. Logaritmos.

Frecuencia	Periodo	a_p	b_p	$I(\omega_i) = \frac{T(a_p^2 + b_p^2)}{4\pi}$	$\frac{(a_p^2 + b_p^2)}{2}$
1	16	0,0586	-0,2688	0,9509	0,0378
2	8	0,0580	-0,1119	0,1995	0,0079
3	5,3333	0,0489	-0,0714	0,0942	0,0037
4	4	0,0442	-0,0449	0,0499	0,0020
5	3,2	0,0507	-0,0323	0,0454	0,0018
6	2,6667	0,0433	-0,0161	0,0268	0,0011
7	2,2857	0,0377	-0,0069	0,0184	0,0007
8	2	0,0234	0,0000	0,0069	0,0003

Y su varianza

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^7 (a_p^2 + b_p^2) + a_8^2 = 0,0276$$

El periodograma del Consumo de Energía Eléctrica Final sería:

Tabla nº 7. Periodograma del Consumo de Energía Eléctrica en TEP. Logaritmos.

Frecuencia	Periodo	a_p	b_p	$I(\omega_i) = \frac{T(a_p^{*2} + b_p^{*2})}{4\pi}$	$\frac{(a_p^{*2} + b_p^{*2})}{2}$
1	16	0,0381	-0,1883	0,4638	0,0185
2	8	0,0439	-0,0767	0,0982	0,0039
3	5,3333	0,0390	-0,0522	0,0534	0,0021
4	4	0,0367	-0,0290	0,0275	0,0011
5	3,2	0,0337	-0,0180	0,0183	0,0007
6	2,6667	0,0296	-0,0121	0,0128	0,0005
7	2,2857	0,0314	-0,0071	0,0130	0,0005
8	2	0,0162	0,0000	0,0033	0,0001

Y su varianza:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^7 (a_p^{*2} + b_p^{*2}) + a_8^{*2} = 0,0557$$

La covarianza cruzada del PIB y el Consumo de Energía Eléctrica sería entonces:

Tabla nº 8. Covarianza cruzada entre el PIB en Millones de euros de España de 2000 y el del Consumo de Energía Eléctrica en TEP . Logaritmos.

Frecuencia	Periodo	Consumo Energía Final Eléctrica		PIB		$\frac{(a_p a_p^* + b_p b_p^*)}{2}$
		a_p	b_p	a_p^*	b_p^*	
1	16	0,0381	-0,1883	0,0586	-0,2688	0,0264
2	1	0,0439	-0,0767	0,0580	-0,1119	0,0056
3	0,3333	0,0390	-0,0522	0,0489	-0,0714	0,0028
4	0	0,0367	-0,0290	0,0442	-0,0449	0,0015
5	0,2	0,0337	-0,0180	0,0507	-0,0323	0,0011
6	0,1667	0,0296	-0,0121	0,0433	-0,0161	0,0007
7	0,1429	0,0314	-0,0071	0,0377	-0,0069	0,0006
8	0	0,0162	0,0000	0,0234	0,0000	0,0002

$$\mu = \sum_{p=1}^7 \left(\frac{a_p a_p^* + b_p b_p^*}{2} \right) + a_8 a_8^* = 0,0391$$

La estimación mínimo cuadrática sería entonces:

$$\hat{b}_{MCO} \cong \frac{\sum_{p=1}^7 \left(\frac{a_p a_p^* + b_p b_p^*}{2} \right) + a_8 a_8^*}{\sum_{p=1}^7 \left(\frac{a_p^2 + b_p^2}{2} \right) + a_8^2} = \frac{0,0391}{0,0276} = 1,4182$$

La varianza del error mínimo cuadrático:

$$(y_t - \hat{y}_t)^2 = n \left(\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{k-1} (a_p^2 + b_p^2) + 2a_{T/2}^2 - \frac{\left(\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{k-1} (a_p a_p^* + b_p b_p^*) + 2 \cdot a_{T/2} a_{T/2}^* \right)^2}{\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{k-1} (a_p^2 + b_p^2) + 2a_{T/2}^2} \right) = 16 \left(0,0557 - \frac{0,0391^2}{0,0276} \right) = 0,00232$$

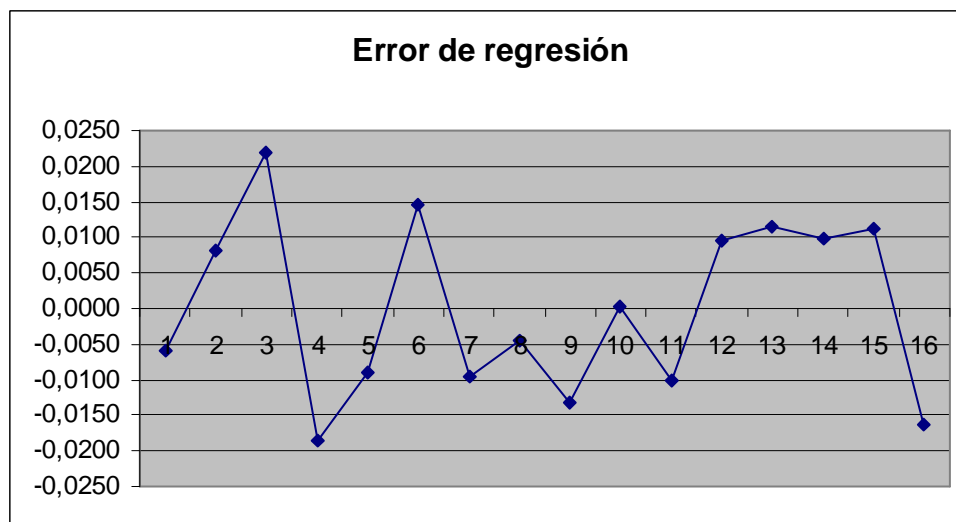
El error de regresión, cuyo DW=2,006, figura calculado en la tabla nº 9.

Tabla nº 9. Error de la regresión MCO entre el Consumo de energía final eléctrica (TEP) y del PIB en Millones de euros de España de 2000. Logaritmos.

y_t	x_t	\hat{y}_t	\hat{u}_t

-0,3311	-0,2293	-0,3253	-0,0058
-0,3317	-0,2397	-0,3400	0,0082
-0,2848	-0,2162	-0,3066	0,0218
-0,2564	-0,1677	-0,2378	-0,0186
-0,2129	-0,1438	-0,2039	-0,0090
-0,1356	-0,1058	-0,1501	0,0145
-0,0975	-0,0621	-0,0881	-0,0094
-0,0269	-0,0158	-0,0224	-0,0046
0,0344	0,0335	0,0475	-0,0131
0,0986	0,0693	0,0983	0,0002
0,1260	0,0960	0,1362	-0,0102
0,1891	0,1265	0,1794	0,0097
0,2365	0,1587	0,2250	0,0115
0,2853	0,1942	0,2754	0,0100
0,3425	0,2336	0,3312	0,0112
0,3647	0,2687	0,3810	-0,0163

La representación gráfica del error de regresión figura a continuación:



Test sobre el periodograma acumulado de los errores de regresión

En Durbin (1965) se considera las modificaciones necesarias en la prueba del periodograma acumulado cuando este se computa para los residuos de los mínimos cuadrados ordinarios. En lugar de la línea simple $y = c_0 + j/m$, son necesarias dos líneas que conducen a una prueba con límites análogos a los del test d. Cuando la trayectoria de s_j cruza la línea superior la hipótesis de la independencia sería de los errores es rechazada y cuando cae por debajo de la

línea inferior la hipótesis es aceptada, y en el lugar intermedio el test sería inconcluso.

La modificación propuesta es en relación con las bandas de aceptación del test

que para $m = \frac{1}{2}T$, se definirían a partir de $y = \pm c_0 + j/m'$ para el límite superior

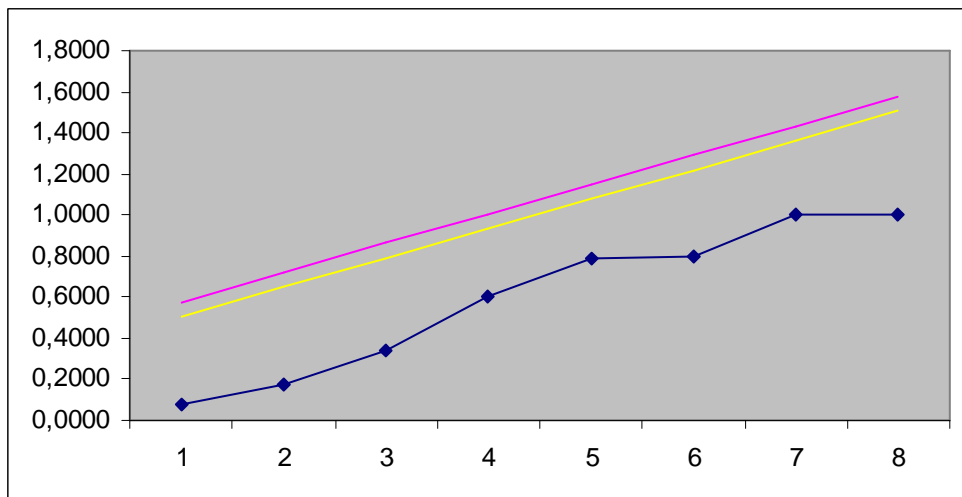
c^+ y a partir de $y = \pm c_0 + \left\{ j - \frac{1}{2}(k-1) \right\} / m'$ para el límite superior c^- , siendo

$m' = \frac{1}{2}(T - k)$ para todo T y k. Los valores de c_0 se obtienen en la Tabla nº 1.

La representación gráfica se ha realizado calculando las bandas superior e inferior del test con un nivel del 1% de correlación serial positiva, siendo T=16 y k=2, m'=7. Con el 1% de significación para m' el valor que se obtiene de la tabla es $c_0 = 0,24165$.

Tabla nº 10 .- Periodograma acumulado del error mínimo-cuadrático

Frecuencia	Periodo	a_p	b_p	$I(\omega) = \frac{T(a_p^2 + b_p^2)}{4\pi}$	s_j	$c^+, k=2$	$c^-, k=2$
1	16	0,0046	-0,0017	0,0003	0,0826	0,5762	0,5048
2	8	-0,0043	-0,0030	0,0003	0,1771	0,7191	0,6477
3	5,3333	-0,0065	0,0025	0,0006	0,3447	0,8619	0,7905
4	4	-0,0079	-0,0037	0,0009	0,6057	1,0048	0,9334
5	3,2	0,0029	-0,0067	0,0007	0,7928	1,1477	1,0762
6	2,6667	0,0013	0,0010	0,0000	0,8015	1,2905	1,2191
7	2,2857	-0,0069	0,0031	0,0007	0,9995	1,4334	1,3619
8	2	0,0004	0,0000	0,0000	1,0000	1,5762	1,5048



Bibliografía

Alvarez N. (1990). Una aproximación a los ciclos económicos. Economía aplicada cuantitativa I. Cuadernos de la UNED. 1990: 143-201.

Brunk, H.D. (1962). "On the range of the difference between hypothetical distribution function and Pyke's modified empirical distribution function". Ann. Math. Statist. 33, 525-32.

Contreras, D y Escolano J (1984): El análisis espectral como instrumento para detectar la estacionalidad. ESTADISTICA ESPAÑOLA Núm. 104, i 984, págs. 101 a 144
http://www.ine.es/revistas/estaespa/104_6.pdf

Durbin J. (1969), "Test for serial correlation in regression analysis based on the periodogram of least squared residuals". Biometrika, vol 56, nº1, (mar-1969), pp 1-15.

Engle R. (1972). "Band spectrum regression". Working Paper Department of economics. MIT. Nº26. November 1972.

Hannan E. J. (1963) "Regression for Time Series," in Time Series Analysis ed. by M. Rosenblatt, John Wiley, 1963.

Parra, Francisco (2011): Multiplicación y división de series armónicas:
<http://econometria.files.wordpress.com/2011/08/multiplicacion-y-division-de-series-armonic3b3nicas1.pdf>

Parra, Francisco (2010): Estudio de la covarianza cruzada:
<http://econometria.files.wordpress.com/2010/02/estudio-de-la-covarianza-cruzada.pdf>

Pyke R. (1959). "The supremum and infimum of the Poisson process". Ann. Math. Statist.30, 568-76.

