

# Aproximación FFF del Producto Interior Bruto de España 1971-2010 utilizando funciones paramétricas.

**Francisco Parra Rodríguez**

**Doctor Economía UNED**

**Jefe de Servicio de Estadísticas Económicas y Sociodemográficas del Instituto Cantabro de Estadísticas.**



## 1.- Introducción

La aproximación FFF multivariada de Gallant (1981,1983) presenta dificultades prácticas ya que precisa de una gran cantidad de datos para ser estimada por los métodos convencionales, la reducción de grados de libertad que ocasiona el utilizar secuencias de series de senos y cosenos en una regla de difícil aplicación práctica, puede solventarse parametrizando los ángulos que determinan la relación polar en un eje de tres dimensiones. Se presenta un ejemplo con el Producto Interior Bruto, el empleo a tiempo completo y el stock de capital neto de la economía española durante el periodo 1971-2000 que ofrece resultado no muy alejado de la aproximación FFF multivariada, presentando además la ventaja de que puede ser implementado en un contexto teórico de restricciones de las variables que determinan la función de producción.

## 2.- Parametrización de curvas

Se denominan ecuaciones paramétrica a aquellas ecuaciones en que las variables  $X$  e  $Y$ , cada una separadamente, están expresadas en función de la misma tercera variable,  $t$ , a la que se denomina variable paramétrica, estas ecuaciones se representan en la siguiente forma general:

$$\begin{cases} X = u(t) \\ Y = v(t) \end{cases}$$

Una ecuación paramétrica permite representar curvas o superficies en el plano o en el espacio, mediante valores arbitrarios (parámetros). En el uso estándar del sistema de coordenadas, una o dos variables (dependiendo de si se utilizan dos o tres dimensiones respectivamente) son consideradas como variables independientes, mientras que la restante, a la que se denomina variable dependiente, toma un valor en función de los valores que toman las variable(s) independiente(s). Así por ejemplo la expresión de un punto cualquiera  $(x, y)$  equivale a la expresión  $(x, f(x))$ .

Esta representación tiene la limitación de requerir que la curva sea una función de  $X$  en  $Y$ , es decir que todos los valores  $X$  tengan un valor  $Y$  y sólo un valor correspondiente en  $Y$ , y no todas las curvas cumplen con dicha condición. En una ecuación paramétrica, tanto  $X$  como  $Y$  son considerados variables dependientes, cuyo resultado surge de una tercera variable (sin representación

gráfica) conocida como parámetro, lo que la representación de funciones circulares en donde un valor de X puede dar lugar a dos valores de Y.

Por ejemplo, en la ecuación  $Y = X^2$ , una parametrización tendrá la forma  $\begin{cases} X = u(t) \\ Y = v(t) \end{cases}$ , por lo que una parametrización posible sería  $\begin{cases} X = t \\ Y = t^2 \end{cases}$

Una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio r verifica

que  $X^2 + Y^2 = r^2$ , y una expresión paramétrica sería  $\begin{cases} X = r \cos t \\ Y = r \sin t \end{cases}$

La representación paramétrica de una curva en un espacio n-dimensional consiste por tanto en "n" funciones de una variable t que actúa como variable independiente o parámetro (habitualmente se considera que t es un número real y que los puntos del espacio n-dimensional están representados

por n coordenadas reales), de la forma  $e_i = f_i(t), f_i : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ ,

donde  $e_i$  representa la i-ésima coordenada del punto generado al asignar valores del intervalo [a, b] a t. Por ejemplo, para representar una curva en el espacio se usan 3 funciones  $X = u(t)$ ,  $Y = v(t)$  y  $Z = g(t)$ .

Es común que se exija que el intervalo [a, b] sea tal que a cada punto  $a \leq t < b$  le corresponda un punto distinto de la curva; si las coordenadas del punto obtenido al hacer  $t = a$  son las mismas del punto correspondiente a  $t = b$  la curva se denomina cerrada.

Se dice que un punto de la curva correspondiente a un valor t del intervalo es un punto ordinario si las derivadas de las funciones paramétricas existen en y son continuas en ese punto y al menos una es distinta de 0. Si un arco de curva está compuesto solamente de puntos ordinarios se denomina suave.

Es común resumir las ecuaciones paramétricas de una curva en una sola ecuación vectorial

$$\vec{r}(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) \hat{e}_i = f_1(t) \hat{e}_1 + f_2(t) \hat{e}_2 + \dots + f_n(t) \hat{e}_n$$

donde  $\hat{e}_i$  representa al vector unitario correspondiente a la coordenada i-ésima. Por ejemplo, las funciones paramétricas de un círculo unitario con centro en el origen son  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ . Podemos reunir estas ecuaciones como una sola ecuación de la forma

$$\vec{r}(t) = \cos(t) \hat{i} + \sin(t) \hat{j}$$

Una superficie parametrizada en  $\mathfrak{R}^3$  es la imagen de una función continua S definida en una región  $D \subseteq \mathfrak{R}^2$  que toma valores en  $\mathfrak{R}^3$ , esto es,

$$S : (u, v) \in D \subseteq \mathfrak{R}^2 \rightarrow S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathfrak{R}^3$$

Las variables independientes de la función  $S$  se llaman parámetros de la superficie y la propia función  $S$  recibe el nombre de parametrización de la superficie. La imagen por  $S$  de la frontera de la región  $D$  se llama borde o contorno de la superficie. Si  $S$  es inyectiva, lo que significa que no hay puntos dobles, entonces se dice que la superficie es simple.

## 2. Parametrización de una función periódica.

Dadas  $n$  observaciones de las variables aleatorias  $x_t \rightarrow N(\bar{x}, \sigma_y^2)$ .

$$x_t = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

A cada observación  $(t, x_t)$  le corresponde un punto  $P_t$  en el eje cartesiano, de forma que

$$P_1 \Rightarrow (1, x_1); P_2 \Rightarrow (2, x_2); \dots; P_n \Rightarrow (n, x_n)$$

que a su vez, se hace corresponder con una forma polar  $r_{t_r}$  para cada par  $(t, x_t)$ , siendo:

$$r_t = \sqrt{t^2 + x_t^2} \quad \text{y} \quad \gamma_t = \text{ArcTg}\left(\frac{x_t}{t}\right)$$

Dado que  $P_t(t, x_t) = t + ix_t = (r_t \cos \gamma_t) + i(r_t \sin \gamma_t)$ , se obtiene que  $x_t = r_t \sin(\gamma_t)$  o  $x_t = \text{tg}(\gamma_t) \cdot t$  (1)

Pudiéndose estimar la variable aleatoria  $\gamma_t$ , a partir de una expansión FFF de la forma:

$$\gamma_t = \gamma_o + \gamma_1 \frac{t \cdot 2\pi}{n} + \gamma_2 \left(\frac{t \cdot 2\pi}{n}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n/2} \left[ c_i^1 \cos\left(\frac{t \cdot 2\pi}{n}\right) + c_i^2 \sin\left(\frac{t \cdot 2\pi}{n}\right) \right] \quad \text{si } n \text{ es par, y}$$

$(n-1)$  si  $n$  es impar.

ó

$$g(\gamma_t / \theta) = a + b\gamma_t + \frac{1}{2}c\gamma_t^2 + 2\sum_{j=1}^J u_j \cos(j\gamma_t) - v_j \sin(j\gamma_t)$$

## Ejemplo 1

Utilizando el empleo equivalentes a tiempo completo de la CNE de España para el periodo 1971-2011<sup>1</sup>, vamos a construir dicha serie temporal a partir de la representación en armónicos del ciclo empírico del argumento, es decir de

$$y_t = tg(\gamma_t) \cdot t$$

siendo

$$\gamma_t = \gamma_0 + \gamma_1 \frac{t \cdot 2\pi}{n} + \gamma_2 \left( \frac{t \cdot 2\pi}{n} \right)^2 + \sum_{i=1}^{n/2} \left[ c_i^1 \cos\left( \frac{t \cdot 2\pi}{n} \right) + c_i^2 \sin\left( \frac{t \cdot 2\pi}{n} \right) \right], \text{ si } n \text{ es par, y}$$

$(n-1)$  si  $n$  es impar.

En la Tabla nº1 figuran los cálculos realizados para obtener la la serie  $\gamma_t$  radianes :

---

<sup>1</sup> Para disponer de esta serie se han enlazado las series de contabilidad nacional 1971-1997 base 86; 1995-2009 base 2000 y 2009-2011 elaborada con la base 2008. El enlace se ha realizado utilizando como

coeficiente de enlace  $C = \frac{L_{1995}^{86}}{L_{1995}^{2000}}$

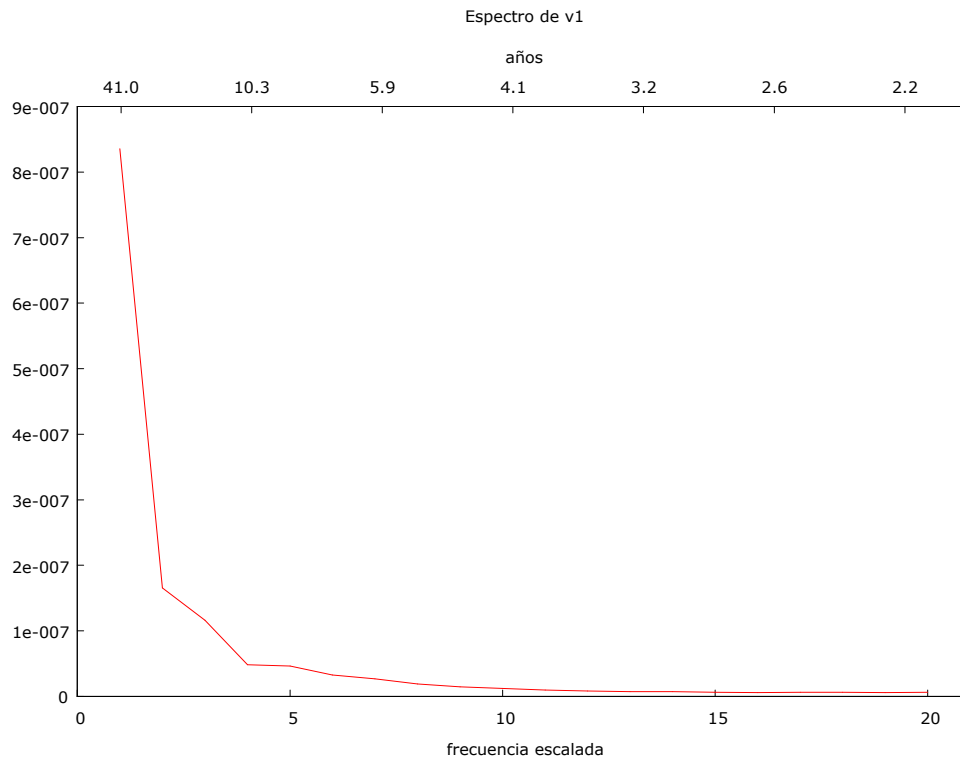
Tabla n°1. Empleo equivalente a tiempo completo. 1971-2011. Miles.

	Empleo equivalente total (x)	t	t/x	$\gamma$ radianes	$\gamma$ radianes FFF	Empleo equivalente total (FFF)
1971	12.743	1	12742,72	1,5707	1,5707	7491
1972	12.878	2	6439,10	1,5706	1,5706	10969
1973	13.194	3	4398,00	1,5706	1,5706	12534
1974	13.262	4	3315,56	1,5705	1,5705	13154
1975	13.028	5	2605,59	1,5704	1,5704	13300
1976	12.889	6	2148,23	1,5703	1,5703	13210
1977	12.786	7	1826,50	1,5702	1,5703	13013
1978	12.443	8	1555,40	1,5702	1,5702	12775
1979	12.176	9	1352,93	1,5701	1,5701	12537
1980	11.901	10	1190,13	1,5700	1,5700	12317
1981	11.590	11	1053,60	1,5698	1,5699	12127
1982	11.483	12	956,88	1,5698	1,5698	11974
1983	11.429	13	879,12	1,5697	1,5697	11861
1984	11.156	14	796,83	1,5695	1,5696	11788
1985	11.350	15	756,68	1,5695	1,5695	11756
1986	11.509	16	719,32	1,5694	1,5694	11765
1987	12.029	17	707,57	1,5694	1,5694	11815
1988	12.433	18	690,72	1,5693	1,5693	11905
1989	12.860	19	676,84	1,5693	1,5692	12034
1990	13.322	20	666,12	1,5693	1,5692	12202
1991	13.450	21	640,46	1,5692	1,5691	12408
1992	13.241	22	601,86	1,5691	1,5691	12651
1993	12.852	23	558,77	1,5690	1,5690	12929
1994	12.788	24	532,81	1,5689	1,5690	13241
1995	13.020	25	520,79	1,5689	1,5690	13584
1996	13.203	26	507,80	1,5688	1,5689	13954
1997	13.668	27	506,22	1,5688	1,5689	14348
1998	14.258	28	509,21	1,5688	1,5689	14761
1999	14.921	29	514,50	1,5689	1,5689	15185
2000	15.670	30	522,32	1,5689	1,5689	15613
2001	16.176	31	521,79	1,5689	1,5689	16036
2002	16.549	32	517,14	1,5689	1,5689	16444
2003	16.949	33	513,60	1,5688	1,5688	16828
2004	17.405	34	511,90	1,5688	1,5688	17175
2005	17.970	35	513,43	1,5688	1,5688	17477
2006	18.564	36	515,67	1,5689	1,5688	17724
2007	19.090	37	515,93	1,5689	1,5687	17908
2008	18.988	38	499,69	1,5688	1,5687	18026
2009	17.733	39	454,68	1,5686	1,5686	18073
2010	17.281	40	432,02	1,5685	1,5686	18052
2011	16.988	41	414,33	1,5684	1,5685	17965

Teniendo en cuenta el peridograma de la serie  $\gamma_t$  radianes (figura n°1) se ha estimado la siguiente aproximación de Fourier:

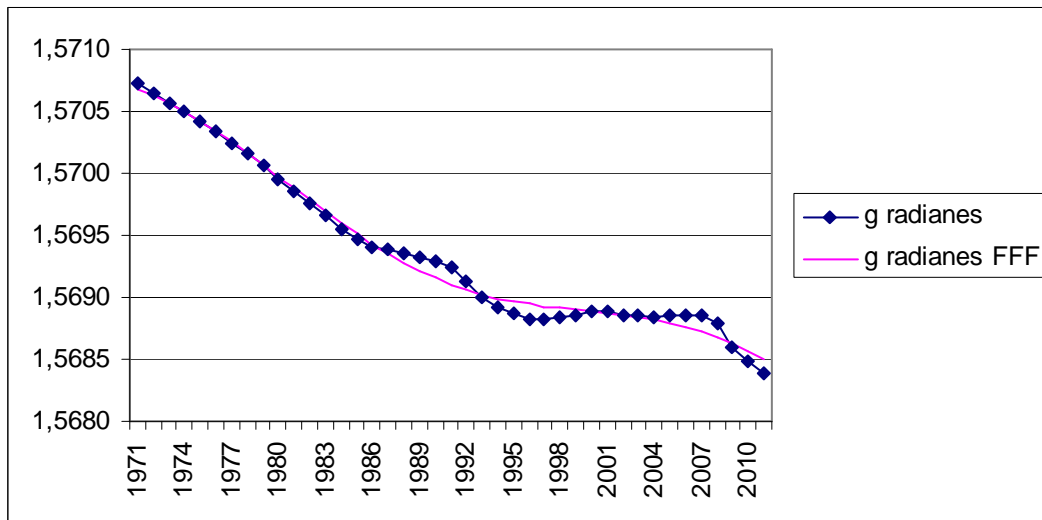
$$\gamma_t = 1,57044 - 0,00028 \frac{t \cdot 2\pi}{n-1} + 0.00014 \cos\left(\frac{t \cdot 2\pi}{n-1}\right)$$

Figura nº 1 Periodograma de  $\gamma_t$  radianes



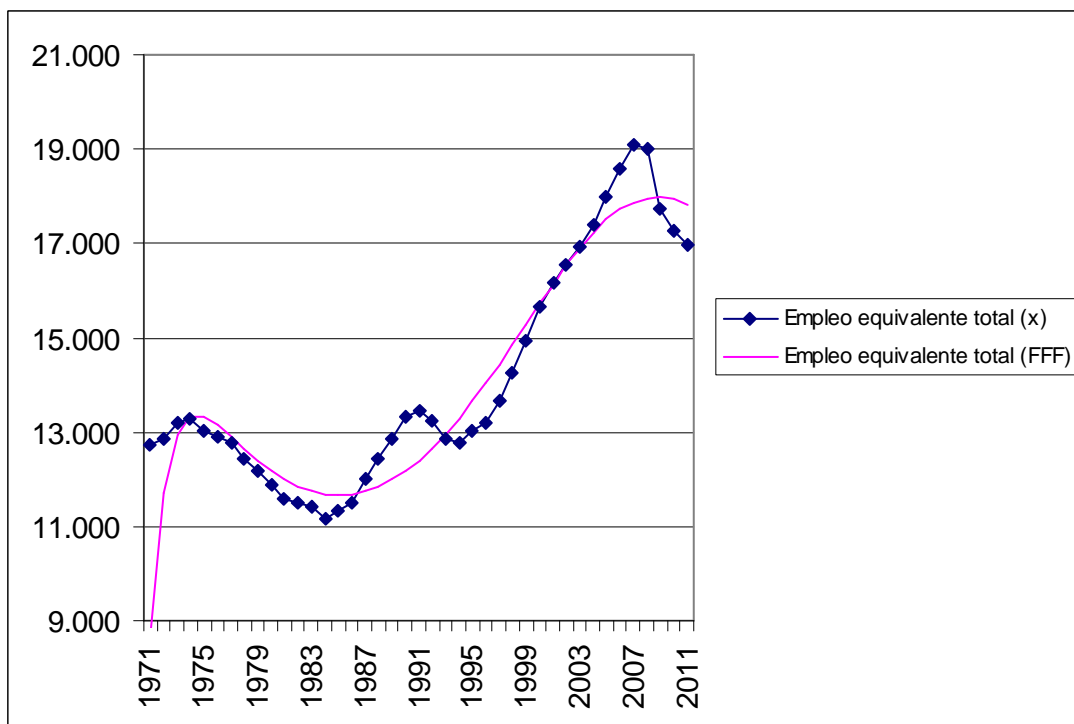
La representación del argumento en radianes y la tendencia calcula aparecen en la Figura nº1.

Figura nº 2. Serie  $\gamma_t$  radianes y estimación FFF



La representación de la serie de empleos equivalentes a tiempo completo estimada se recoge en la figura siguiente:

Figura nº 3. Empleo equivalente a tiempo total 1971-2011



Tenemos ahora  $n$  observaciones de dos variables aleatorias  $x_t \rightarrow N(\bar{x}, \sigma_x^2)$  e  $y_t \rightarrow N(\bar{y}, \sigma_y^2)$ .

$$x_t = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \quad y_t = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$$

A cada observación  $(x_t, y_t)$  le corresponde un punto  $P_t$  en el eje cartesiano, de forma que

$$P_1 \Rightarrow (x_1, y_1); P_2 \Rightarrow (x_2, y_2); \dots; P_n \Rightarrow (x_n, y_n)$$

que su vez, se hace corresponder un forma polar  $r_{t\alpha}$  para cada par  $(x_t, y_t)$ , siendo:

$$r_t = \sqrt{x_t^2 + y_t^2} \quad \text{y} \quad \alpha_t = \text{ArcTg}\left(\frac{y_t}{x_t}\right)$$

Dado que  $P_t(x_t, y_t) = x_t + iy_t = (r_t \cos \alpha_t) + i(r_t \sin \alpha_t)$ , se obtiene que:

$$x_t = r_t \cos(\alpha_t) \quad , \quad y_t = r_t \sin(\alpha_t) \quad \text{e} \quad y_t = \text{tg}(\alpha_t)x_t .$$

La variable aleatoria  $x_t$  puede parametrizarse entonces como  $y_t = \text{tg}(\alpha_t) \cdot \text{tg}(\lambda_t) \cdot t$

Las ecuaciones paramétricas serían entonces:

$$\begin{cases} x_t = \text{tg}(\gamma_t) \cdot t \\ y_t = \text{tg}(\alpha_t) \cdot \text{tg}(\gamma_t) \cdot t \end{cases}$$

Estimándose los ángulos  $\alpha_t$  con la forma general:

$$\gamma_t = \gamma_o + \gamma_1 \frac{t \cdot 2\pi}{n} + \gamma_2 \left(\frac{t \cdot 2\pi}{n}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n/2} \left[ c_i^1 \cos\left(\frac{t \cdot 2\pi}{n}\right) + c_i^2 \sin\left(\frac{t \cdot 2\pi}{n}\right) \right] \quad \text{si } n \text{ es par, y}$$

$(n-1)$  si  $n$  es impar.



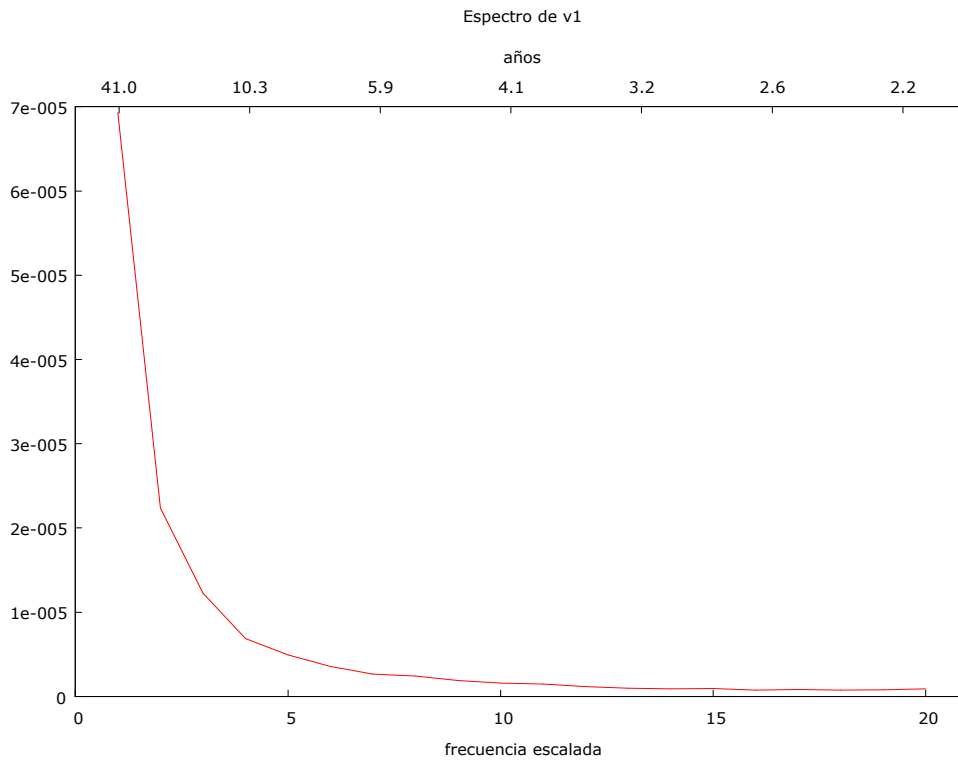
## ***Ejemplo 2***

Utilizamos ahora las cifras de Empleo a tiempo completo y PIB en euros constantes de la CNE (Tabla nº2).

Tabla nº2.- Producto Interior Bruto en euros constantes del año 2000 y Empleo equivalente a tiempo completo. 1971-2011. Millones de euros y miles de empleos.

	Producto Interior Bruto (euros año 2000)	Empleo equivalente total (x)	y/x	t	$\alpha$ radianes	$\alpha$ radianes FFF	Producto Interior Bruto (FFF)
1971	265.269	12.743	20,8173	1	1,5228	1,5231	266.947
1972	286.886	12.878	22,2769	2	1,5259	1,5256	284.980
1973	309.231	13.194	23,4372	3	1,5282	1,5279	307.676
1974	326.605	13.262	24,6267	4	1,5302	1,5299	324.464
1975	328.376	13.028	25,2055	5	1,5311	1,5316	332.525
1976	339.225	12.889	26,3181	6	1,5328	1,5331	341.336
1977	348.855	12.786	27,2852	7	1,5342	1,5343	349.795
1978	353.957	12.443	28,4458	8	1,5357	1,5353	350.876
1979	354.106	12.176	29,0815	9	1,5364	1,5364	353.714
1980	358.712	11.901	30,1406	10	1,5376	1,5374	356.395
1981	358.079	11.590	30,8967	11	1,5384	1,5384	358.012
1982	363.686	11.483	31,6728	12	1,5392	1,5394	365.742
1983	371.759	11.429	32,5287	13	1,5401	1,5403	374.506
1984	377.213	11.156	33,8138	14	1,5412	1,5410	374.572
1985	387.067	11.350	34,1023	15	1,5415	1,5416	388.528
1986	399.453	11.509	34,7076	16	1,5420	1,5420	399.700
1987	421.987	12.029	35,0819	17	1,5423	1,5423	422.393
1988	443.768	12.433	35,6927	18	1,5428	1,5426	440.941
1989	464.793	12.860	36,1429	19	1,5431	1,5429	461.096
1990	482.179	13.322	36,1933	20	1,5432	1,5433	484.146
1991	493.115	13.450	36,6637	21	1,5435	1,5437	496.796
1992	496.504	13.241	37,4979	22	1,5441	1,5442	498.088
1993	490.728	12.852	38,1838	23	1,5446	1,5447	492.466
1994	501.775	12.788	39,2394	24	1,5453	1,5451	498.272
1995	515.405	13.020	39,5862	25	1,5455	1,5455	514.164
1996	527.862	13.203	39,9814	26	1,5458	1,5457	526.306
1997	548.284	13.668	40,1144	27	1,5459	1,5459	547.990
1998	572.782	14.258	40,1727	28	1,5459	1,5459	573.464
1999	599.966	14.921	40,2106	29	1,5459	1,5460	601.276
2000	630.263	15.670	40,2223	30	1,5459	1,5460	632.564
2001	653.255	16.176	40,3855	31	1,5460	1,5461	654.389
2002	670.920	16.549	40,5424	32	1,5461	1,5461	671.263
2003	691.695	16.949	40,8111	33	1,5463	1,5462	689.686
2004	714.291	17.405	41,0401	34	1,5464	1,5463	711.073
2005	740.108	17.970	41,1855	35	1,5465	1,5465	738.260
2006	769.850	18.564	41,4701	36	1,5467	1,5467	769.017
2007	797.367	19.090	41,7699	37	1,5469	1,5470	800.561
2008	804.223	18.988	42,3538	38	1,5472	1,5474	809.929
2009	774.285	17.733	43,6643	39	1,5479	1,5478	772.540
2010	771.809	17.281	44,6624	40	1,5484	1,5484	770.578
2011	775.034	16.988	45,6238	41	1,5489	1,5489	774.112

Figura nº4.- Periodograma de  $\alpha_t$  radianes

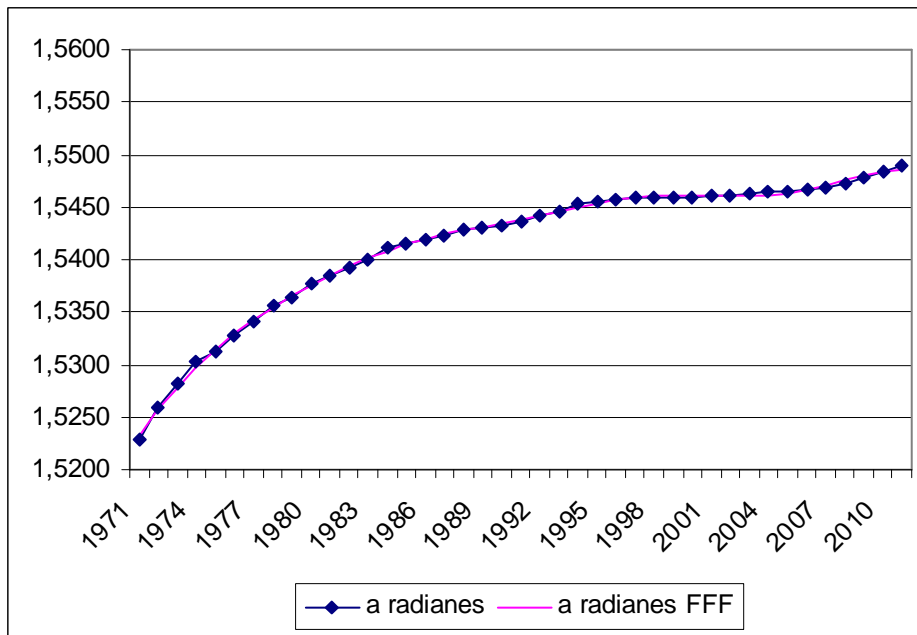


Tendiendo en cuenta el espectro de la serie  $\alpha_t$  radianes (Figura nº4), se calcula la siguiente expansión FFF:

$$\alpha_t = 1,5201 + 0,0110 \frac{t \cdot 2\pi}{n-1} - 0,0021 \left( \frac{t \cdot 2\pi}{n-1} \right)^2 + 0,0003 \cos \left( \frac{t \cdot 2\pi}{n-1} \right) + 0,0013 \sin \left( \frac{t \cdot 2\pi}{n-1} \right) + 0,0003 \sin \left( \frac{t \cdot 4\pi}{n-1} \right) + 0,0003 \sin \left( \frac{t \cdot 6\pi}{n-1} \right)$$

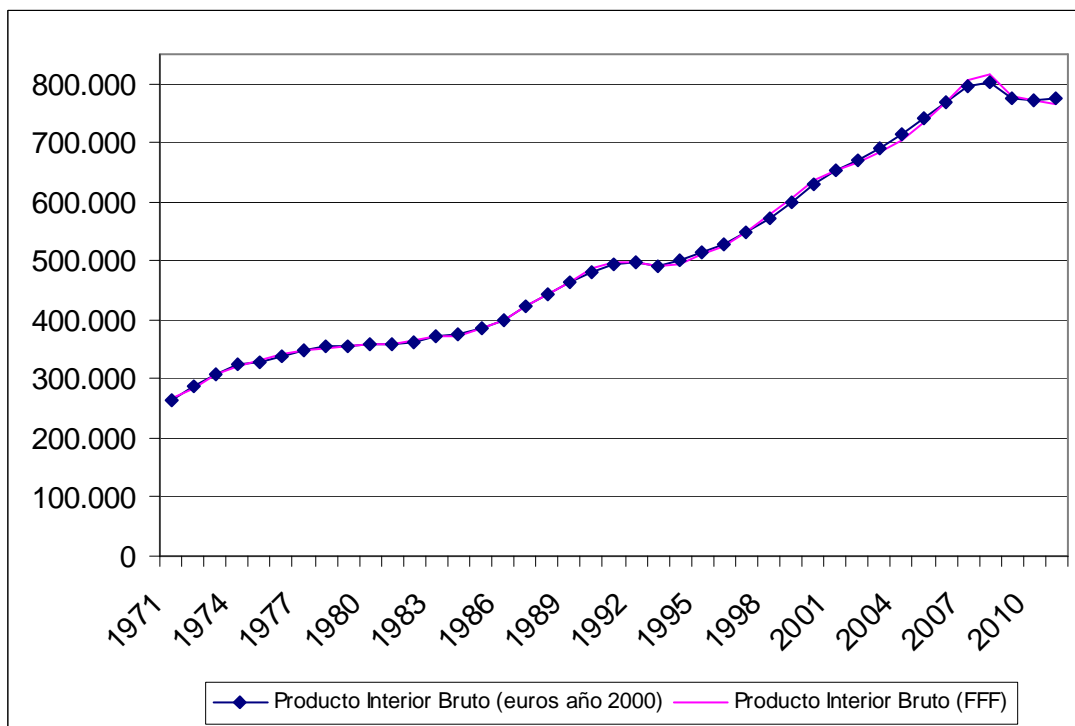
La estimación de la serie  $\alpha_t$  radianes a partir de la expansión FFF se representa en la Figura nº5.

Figura nº5. Serie  $\alpha_t$  radianes y estimación FFF



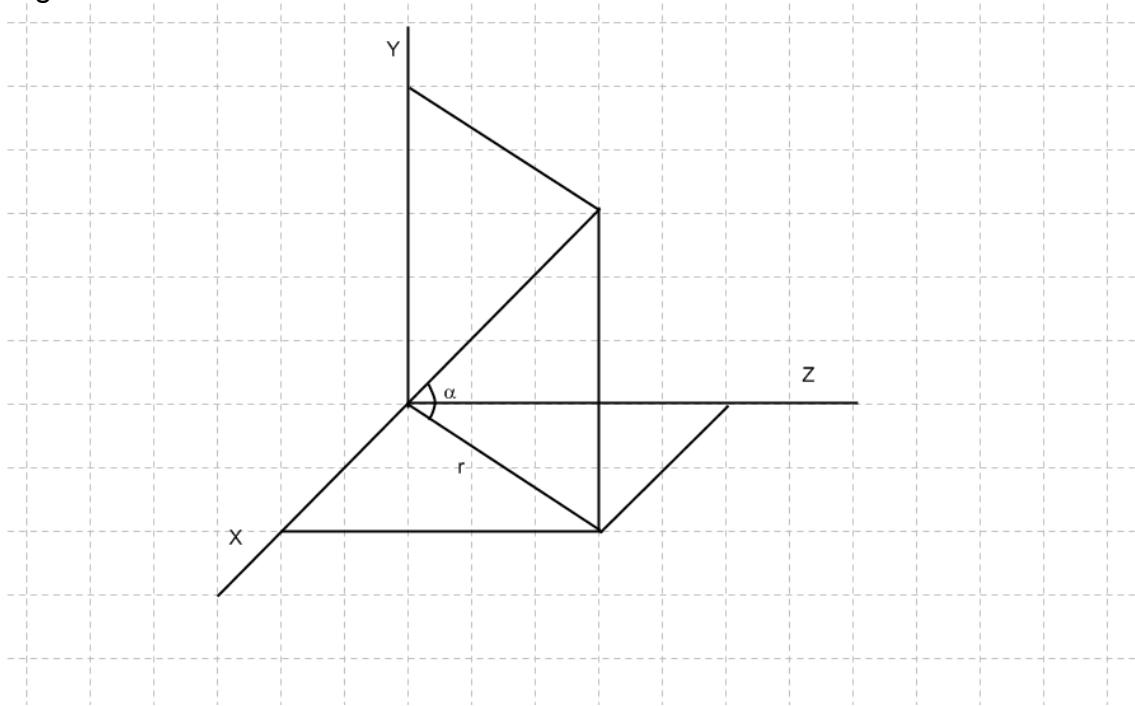
La estimación del PIB en euros constantes a partir del empleo aparece en la figura siguiente:

Figura nº 6. Producto Interior Bruto en euros constantes del año 2000. 1971-2011.



Se trata ahora de estimar la relación  $y_t = F(x_t, z_t)$  en donde  $x_t$  y  $z_t$  actúan como variables explicativas. En este caso las relaciones geométricas a considerar son las que aparecen en la figura n°3.

Figura n°3



Se parte ahora de la representación polar entre cada  $x_t$  y  $z_t$ , que vendrá dada por un módulo  $r_t = \sqrt{x_t^2 + z_t^2}$  y un argumento  $\alpha_t = \text{ArcTg}\left(\frac{z_t}{x_t}\right)$ . de forma que se puede construir un nuevo plano entre el módulo  $r_t$  la variable dependiente  $y_t$ .

Dado que el módulo  $r_t$  puede tener un valor diferente según se cambie el nivel de la variable parece aconsejable normalizar dichas variables.

En consecuencia ahora tenemos dos variables  $r_t$  e  $y_t$  cuya representación polar tendrá a su vez un módulo  $\rho_t = \sqrt{r_t^2 + y_t^2}$  y un argumento  $\beta_t = \text{ArcTg}\left(\frac{y_t}{r_t}\right)$ .

Operando  $\rho_t = \sqrt{x_t^2 + z_t^2 + y_t^2}$

Las representación polar del sistema vendría dada a partir de:

$$r_t = \rho_t \cos(\beta_t) \quad y_t = \rho_t \sin(\beta_t) \quad \text{e} \quad y_t = \text{tg}(\beta_t) \sqrt{x_t^2 + z_t^2} \quad (1)$$

Dado que  $z_t = \operatorname{tg}(\alpha_t)x_t$ , entonces

$$y_t = \operatorname{tg}(\beta_t)\sqrt{x_t^2 + [\operatorname{tg}(\alpha_t)x_t]^2} = x_t\sqrt{[\operatorname{tg}(\beta_t)]^2 + [\operatorname{tg}(\beta_t) \cdot \operatorname{tg}(\alpha_t)]^2}$$

por otro lado y dado que  $\frac{\pi}{2} - \alpha_t = \operatorname{ArcTg}\left(\frac{x_t}{z_t}\right)$ . entonces

$$y_t = z_t\sqrt{[\operatorname{tg}(\beta_t)]^2 + \left[\operatorname{tg}(\beta_t) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_t\right)\right]^2}$$

considerando tanto la sucesión de ángulos  $\alpha_t$  y  $\beta_t$  como series de Fourier, se puede afirmar que el conjunto de datos  $(x_t, y_t, z_t)$ , puede parametrizarse en función de una de ellas cualesquiera, y  $t$ .

Supongamos que en nuestro conjunto de datos la dimensión  $x_t$ , es exógena, entonces:

$$\begin{cases} x_t = x_t \\ z_t = \operatorname{tg}(\alpha_t)x_t \\ y_t = x_t\sqrt{[\operatorname{tg}(\beta_t)]^2 + [\operatorname{tg}(\beta_t) \cdot \operatorname{tg}(\alpha_t)]^2} \end{cases} \quad (2)$$

Siendo

$$\alpha_t = \alpha_o + \alpha_1 \frac{t \cdot 2\pi}{n} + \alpha_2 \left(\frac{t \cdot 2\pi}{n}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n/2} \left[ c_i^1 \cos\left(\frac{t \cdot 2\pi}{n}\right) + c_i^2 \sin\left(\frac{t \cdot 2\pi}{n}\right) \right]$$

$$\beta_t = \beta_o + \beta_1 \frac{t \cdot 2\pi}{n} + \beta_2 \left(\frac{t \cdot 2\pi}{n}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n/2} \left[ b_i \cos\left(\frac{t \cdot 2\pi}{n}\right) + c_i \sin\left(\frac{t \cdot 2\pi}{n}\right) \right]$$

La parametrización sobre la dimensión  $z_t$  :

$$\begin{cases} z_t = z_t \\ z_t = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_t\right)x_t \\ y_t = z_t\sqrt{[\operatorname{tg}(\beta_t)]^2 + \left[\operatorname{tg}(\beta_t) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_t\right)\right]^2} \end{cases} \quad (3)$$

Por último, la parametrización sobre  $y_t$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_t = y_t \\ x_t = \frac{y_t}{\sqrt{[\operatorname{tg}(\beta_t)]^2 + [\operatorname{tg}(\beta_t) \cdot \operatorname{tg}(\alpha_t)]^2}} \\ z_t = \frac{y_t}{\sqrt{[\operatorname{tg}(\beta_t)]^2 + \left[ \operatorname{tg}(\beta_t) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_t\right) \right]^2}} \end{array} \right. \quad (4)$$

### **Ejemplo 3**

En el ejemplo 3 planteamos una estimación de la función de producción de la economía española utilizando los datos de empleo equivalente a tiempo completo, el Producto Interior Bruto de la CNE, valorada está última en euros constantes y el Stock neto de de capital de la Fundación del BBVA valorada en miles de euros constantes base 2000, y sin considerar el valor de la vivienda (ver tabla nº6).

Tabla nº 6. Empleo equivalente a tiempo completo, Producto Interior Bruto de la s y el Stock neto de de capital. Millones constantes de euros año 2000 y miles de empleos.

	Producto Interior Bruto (Ctes) Y	Empleo a tiempo completo X	Stock de Capital Z
1971	243.448	12.743	265.269
1972	262.107	12.878	286.886
1973	284.333	13.194	309.231
1974	307.959	13.262	326.605
1975	328.363	13.028	328.376
1976	346.791	12.889	339.225
1977	363.943	12.786	348.855
1978	379.636	12.443	353.957
1979	393.268	12.176	354.106
1980	406.561	11.901	358.712
1981	417.897	11.590	358.079
1982	429.637	11.483	363.686
1983	440.562	11.429	371.759
1984	448.413	11.156	377.213
1985	459.117	11.350	387.067
1986	474.688	11.509	399.453
1987	496.304	12.029	421.987
1988	523.763	12.433	443.768
1989	559.321	12.860	464.793
1990	597.434	13.322	482.179
1991	635.839	13.450	493.115
1992	668.924	13.241	496.504
1993	691.947	12.852	490.728
1994	715.836	12.788	501.775
1995	744.264	13.020	515.405
1996	769.988	13.203	527.862
1997	799.170	13.668	548.284
1998	835.577	14.258	572.782
1999	878.412	14.921	599.966
2000	923.074	15.670	630.263
2001	968.182	16.176	653.255
2002	1.011.559	16.549	670.920
2003	1.056.437	16.949	691.695
2004	1.103.659	17.405	714.291
2005	1.157.349	17.970	740.108
2006	1.217.898	18.564	769.850
2007	1.284.160	19.090	797.367
2008	1.344.152	18.988	804.223
2009	1.380.015	17.733	774.285
2010	1.413.146	17.281	771.809



La estimación de la función de producción se puede abordar restringiendo alguna de las tres variables, esto es si se restringe el Empleo equivalente estaríamos en un modelo de función de producción en el que esta magnitud estaría limitando la producción nacional y lo consideraríamos exógeno a la función de producción, si restringimos el stock de capital sería este otro factor de producción el limitativo y por tanto sería exógeno, si restringimos el PIB estaríamos ante un modelo en el que la demanda agregada limitaría el PIB y este último establecería la cantidad de empleo y stock capital necesaria para alcanzar el volumen anual de producción, en este caso el PIB sería la variable exógena al modelo.

En primer lugar hay que aproximar las trayectorias temporales de los ángulos  $\alpha_t$  y  $\beta_t$ .

Tabla nº 7.- Empleo equivalente a tiempo completo, Producto Interior Bruto de la s y el Stock neto de de capital en logaritmos y su representación polar.

	Producto Interior Bruto	Empleo equivalentes a tiempo completo	Stock de Capital	r	$\beta$ radianes	$\beta$ FFF	$\alpha$ radianes
1971	12,4885	9,4527	12,4027	15,5942	0,6753	0,6755	0,9196
1972	12,5668	9,4633	12,4765	15,6594	0,6763	0,6761	0,9219
1973	12,6418	9,4875	12,5579	15,7389	0,6767	0,6764	0,9238
1974	12,6965	9,4927	12,6377	15,8058	0,6767	0,6765	0,9266
1975	12,7019	9,4749	12,7019	15,8465	0,6757	0,6764	0,9299
1976	12,7344	9,4642	12,7565	15,8839	0,6758	0,6761	0,9325
1977	12,7624	9,4561	12,8048	15,9179	0,6758	0,6758	0,9347
1978	12,7769	9,4289	12,8470	15,9358	0,6758	0,6754	0,9377
1979	12,7774	9,4072	12,8822	15,9514	0,6754	0,6752	0,9401
1980	12,7903	9,3844	12,9155	15,9649	0,6754	0,6751	0,9424
1981	12,7885	9,3579	12,9430	15,9716	0,6752	0,6752	0,9448
1982	12,8040	9,3486	12,9707	15,9886	0,6752	0,6754	0,9463
1983	12,8260	9,3439	12,9958	16,0062	0,6755	0,6758	0,9474
1984	12,8406	9,3197	13,0135	16,0065	0,6761	0,6761	0,9493
1985	12,8664	9,3370	13,0371	16,0357	0,6762	0,6763	0,9493
1986	12,8979	9,3509	13,0704	16,0709	0,6763	0,6765	0,9498
1987	12,9527	9,3950	13,1149	16,1328	0,6765	0,6764	0,9492
1988	13,0031	9,4281	13,1688	16,1959	0,6765	0,6761	0,9494
1989	13,0493	9,4619	13,2345	16,2689	0,6760	0,6757	0,9501
1990	13,0861	9,4972	13,3004	16,3431	0,6752	0,6751	0,9507
1991	13,1085	9,5067	13,3627	16,3994	0,6743	0,6745	0,9524
1992	13,1153	9,4911	13,4134	16,4317	0,6736	0,6739	0,9550
1993	13,1036	9,4612	13,4473	16,4421	0,6729	0,6733	0,9577
1994	13,1259	9,4562	13,4812	16,4670	0,6730	0,6729	0,9591
1995	13,1527	9,4742	13,5202	16,5093	0,6727	0,6726	0,9596
1996	13,1766	9,4882	13,5541	16,5451	0,6725	0,6724	0,9601
1997	13,2145	9,5228	13,5913	16,5954	0,6725	0,6723	0,9596
1998	13,2583	9,5651	13,6359	16,6562	0,6723	0,6722	0,9591
1999	13,3046	9,6105	13,6859	16,7232	0,6720	0,6720	0,9586
2000	13,3539	9,6595	13,7355	16,7919	0,6718	0,6718	0,9579
2001	13,3897	9,6913	13,7832	16,8492	0,6715	0,6716	0,9580
2002	13,4164	9,7141	13,8270	16,8982	0,6710	0,6712	0,9584
2003	13,4469	9,7379	13,8704	16,9474	0,6707	0,6708	0,9587
2004	13,4790	9,7645	13,9141	16,9985	0,6704	0,6704	0,9589
2005	13,5146	9,7965	13,9616	17,0557	0,6701	0,6700	0,9590
2006	13,5540	9,8290	14,0126	17,1162	0,6698	0,6696	0,9591
2007	13,5891	9,8569	14,0656	17,1756	0,6693	0,6692	0,9595
2008	13,5976	9,8516	14,1113	17,2099	0,6687	0,6687	0,9613
2009	13,5597	9,7832	14,1376	17,1925	0,6678	0,6681	0,9655
2010	13,5565	9,7574	14,1613	17,1974	0,6676	0,6674	0,9675

Las aproximaciones FFF se han realizado con las siguientes funciones:

$$\alpha_i = 0,9321 + 0,0009 \frac{t \cdot 2\pi}{n} + 0,0021 \left( \frac{t \cdot 2\pi}{n} \right)^2 - 0,0051 \cos \left( \frac{t \cdot 2\pi}{n} \right) + 0,0014 \sin \left( \frac{t \cdot 2\pi}{n} \right) - 0,0017 \cos \left( \frac{t \cdot 4\pi}{n} \right) + 0,0005 \sin \left( \frac{t \cdot 4\pi}{n} \right) + 0,0003 \cos \left( \frac{t \cdot 6\pi}{n} \right) - 0,0002 \sin \left( \frac{t \cdot 6\pi}{n} \right) - 0,0005 \cos \left( \frac{t \cdot 8\pi}{n} \right) + 0,0002 \sin \left( \frac{t \cdot 10\pi}{n} \right)$$

$$\beta_i = 0,6720 + 0,0038 \frac{t \cdot 2\pi}{n} - 0,0015 \left( \frac{t \cdot 2\pi}{n} \right)^2 - 0,0009 \cos \left( \frac{t \cdot 2\pi}{n} \right) + 0,0002 \sin \left( \frac{t \cdot 2\pi}{n} \right) + 0,0004 \cos \left( \frac{t \cdot 4\pi}{n} \right) + 0,0003 \sin \left( \frac{t \cdot 6\pi}{n} \right)$$

Los resultados gráficos de las aproximaciones se recogen en las figuras nº 7 y nº 8.

Figura nº7. Serie  $\alpha_i$  radianes y estimación FFF

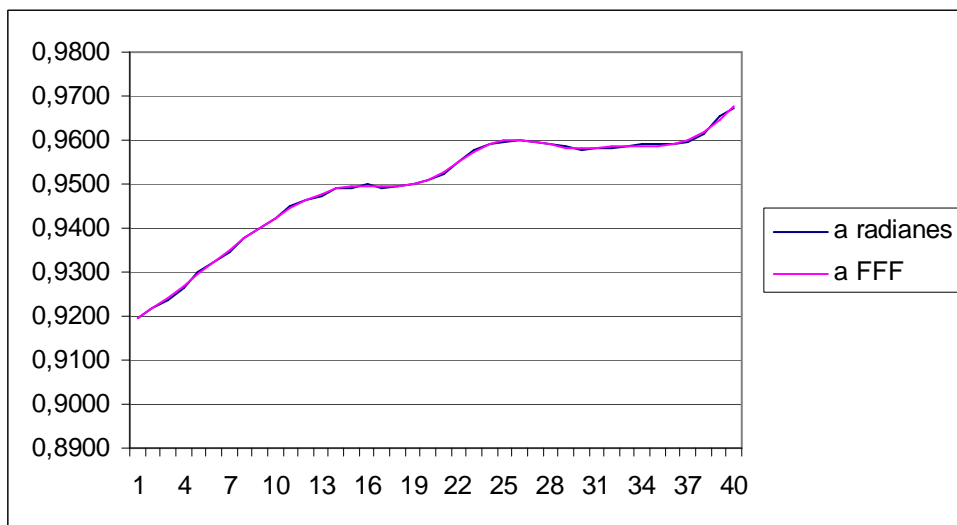
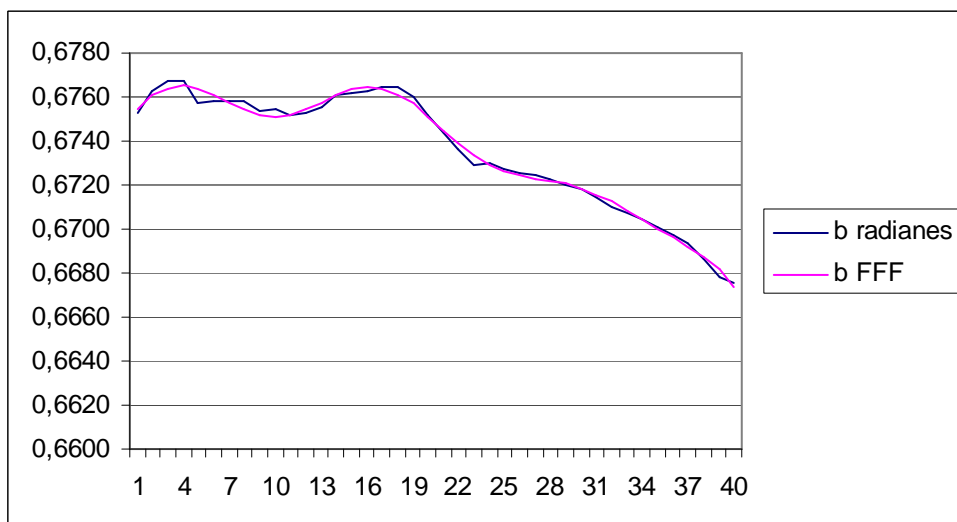


Figura nº8. Serie  $\beta_i$  radianes y estimación FFF



La obtención del modelo que restringe el empleo a tiempo parcial ( $x_t$ ) se calcula en la tabla nº 8 utilizando el sistema de ecuaciones (2), los resultados gráficos se incluyen en las figuras nº 9 y nº10

Tabla nº8. Parametrización del modelo que restringe el empleo a tiempo completo.

	$\beta$ FFF	$\alpha$ FFF	Empleo a tiempo completo (x)	Estimación de Stock de Capital	Estimación del Producto Interior Bruto
1971	0,6755	0,9196	9,4527	12,4031	12,4941
1972	0,6761	0,9216	9,4633	12,4702	12,5573
1973	0,6764	0,9241	9,4875	12,5662	12,6396
1974	0,6765	0,9268	9,4927	12,6433	12,6941
1975	0,6764	0,9295	9,4749	12,6923	12,7139
1976	0,6761	0,9323	9,4642	12,7513	12,7396
1977	0,6758	0,9350	9,4561	12,8129	12,7665
1978	0,6754	0,9376	9,4289	12,8464	12,7666
1979	0,6752	0,9401	9,4072	12,8838	12,7745
1980	0,6751	0,9424	9,3844	12,9151	12,7818
1981	0,6752	0,9445	9,3579	12,9356	12,7848
1982	0,6754	0,9464	9,3486	12,9729	12,8107
1983	0,6758	0,9479	9,3439	13,0072	12,8391
1984	0,6761	0,9489	9,3197	13,0023	12,8333
1985	0,6763	0,9495	9,3370	13,0418	12,8740
1986	0,6765	0,9496	9,3509	13,0644	12,8984
1987	0,6764	0,9494	9,3950	13,1226	12,9552
1988	0,6761	0,9494	9,4281	13,1676	12,9929
1989	0,6757	0,9498	9,4619	13,2259	13,0347
1990	0,6751	0,9509	9,4972	13,3060	13,0880
1991	0,6745	0,9527	9,5067	13,3703	13,1174
1992	0,6739	0,9550	9,4911	13,4124	13,1211
1993	0,6733	0,9572	9,4612	13,4348	13,1076
1994	0,6729	0,9590	9,4562	13,4789	13,1227
1995	0,6726	0,9600	9,4742	13,5327	13,1580
1996	0,6724	0,9601	9,4882	13,5561	13,1744
1997	0,6723	0,9596	9,5228	13,5910	13,2096
1998	0,6722	0,9589	9,5651	13,6301	13,2515
1999	0,6720	0,9583	9,6105	13,6779	13,2997
2000	0,6718	0,9581	9,6595	13,7410	13,3577
2001	0,6716	0,9582	9,6913	13,7893	13,3961
2002	0,6712	0,9584	9,7141	13,8292	13,4230
2003	0,6708	0,9586	9,7379	13,8691	13,4490
2004	0,6704	0,9587	9,7645	13,9089	13,4755
2005	0,6700	0,9588	9,7965	13,9560	13,5091
2006	0,6696	0,9591	9,8290	14,0118	13,5487
2007	0,6692	0,9600	9,8569	14,0788	13,5931
2008	0,6687	0,9617	9,8516	14,1238	13,6067
2009	0,6681	0,9644	9,7832	14,1061	13,5484
2010	0,6674	0,9679	9,7574	14,1749	13,5609

Figura n°9. Parametrización del stock capital en el modelo que restringe el empleo.

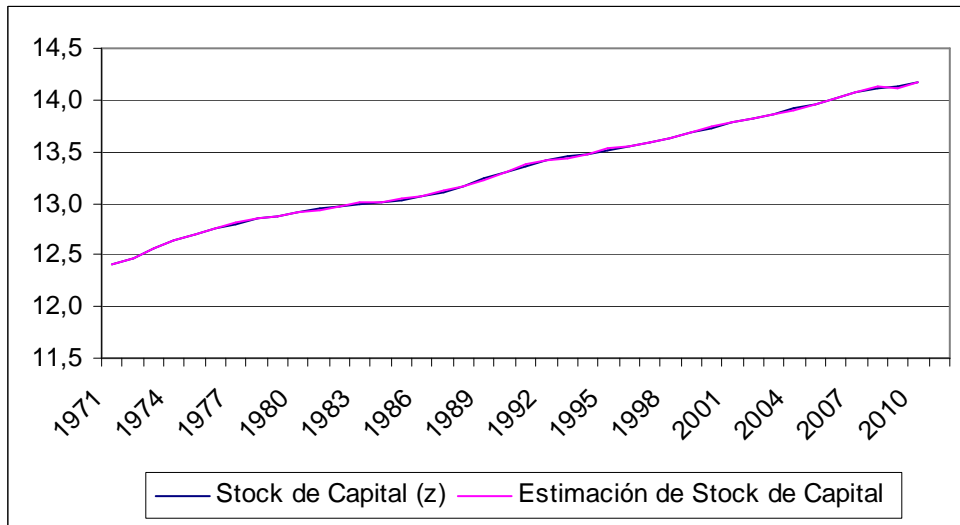
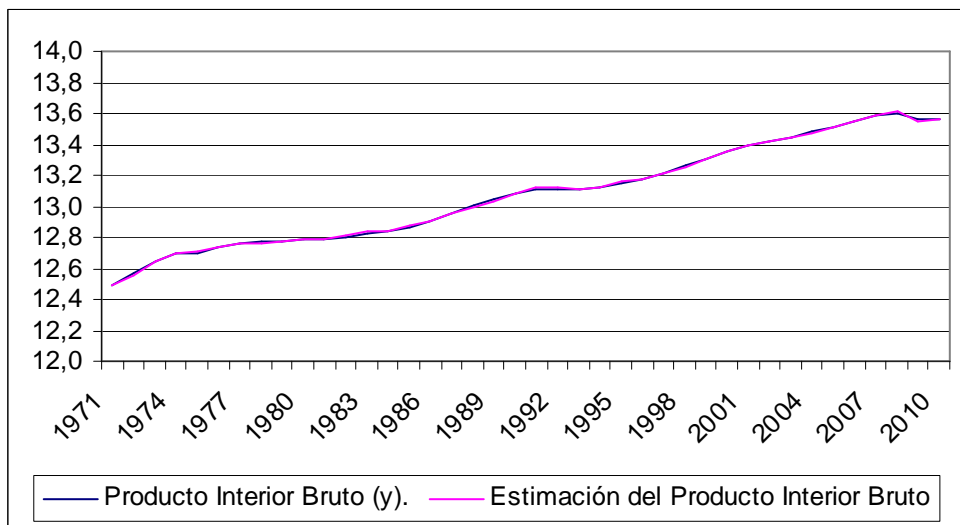


Figura n°10 Parametrización del Producto Interior Bruto en el modelo que restringe el empleo.



La obtención del modelo que restringe del stock de capital neto ( $z_t$ ) se calcula en la tabla n° 9 utilizando el sistema de ecuaciones (3), los resultados gráficos se incluyen en las figuras n° 11 y n°12

Tabla nº9. Parametrización del modelo que restringe el stock de capital

	$\beta$ FFF	$\alpha$ FFF	Stock de Capital (z)	Estimación del Empleo equivalente a tiempo completo	Estimación del Producto Interior Bruto
1971	0,6755	0,9196	12,4027	9,4524	12,4936
1972	0,6761	0,9216	12,4765	9,4681	12,5637
1973	0,6764	0,9241	12,5579	9,4812	12,6312
1974	0,6765	0,9268	12,6377	9,4885	12,6885
1975	0,6764	0,9295	12,7019	9,4820	12,7235
1976	0,6761	0,9323	12,7565	9,4680	12,7448
1977	0,6758	0,9350	12,8048	9,4501	12,7583
1978	0,6754	0,9376	12,8470	9,4294	12,7672
1979	0,6752	0,9401	12,8822	9,4061	12,7730
1980	0,6751	0,9424	12,9155	9,3847	12,7822
1981	0,6752	0,9445	12,9430	9,3632	12,7921
1982	0,6754	0,9464	12,9707	9,3470	12,8085
1983	0,6758	0,9479	12,9958	9,3357	12,8279
1984	0,6761	0,9489	13,0135	9,3277	12,8443
1985	0,6763	0,9495	13,0371	9,3336	12,8694
1986	0,6765	0,9496	13,0704	9,3552	12,9044
1987	0,6764	0,9494	13,1149	9,3896	12,9477
1988	0,6761	0,9494	13,1688	9,4290	12,9941
1989	0,6757	0,9498	13,2345	9,4680	13,0432
1990	0,6751	0,9509	13,3004	9,4932	13,0825
1991	0,6745	0,9527	13,3627	9,5013	13,1100
1992	0,6739	0,9550	13,4134	9,4918	13,1221
1993	0,6733	0,9572	13,4473	9,4700	13,1197
1994	0,6729	0,9590	13,4812	9,4578	13,1249
1995	0,6726	0,9600	13,5202	9,4654	13,1458
1996	0,6724	0,9601	13,5541	9,4868	13,1725
1997	0,6723	0,9596	13,5913	9,5231	13,2099
1998	0,6722	0,9589	13,6359	9,5691	13,2571
1999	0,6720	0,9583	13,6859	9,6161	13,3074
2000	0,6718	0,9581	13,7355	9,6556	13,3523
2001	0,6716	0,9582	13,7832	9,6869	13,3901
2002	0,6712	0,9584	13,8270	9,7125	13,4208
2003	0,6708	0,9586	13,8704	9,7389	13,4502
2004	0,6704	0,9587	13,9141	9,7682	13,4805
2005	0,6700	0,9588	13,9616	9,8004	13,5146
2006	0,6696	0,9591	14,0126	9,8296	13,5495
2007	0,6692	0,9600	14,0656	9,8476	13,5803
2008	0,6687	0,9617	14,1113	9,8428	13,5946
2009	0,6681	0,9644	14,1376	9,8050	13,5787
2010	0,6674	0,9679	14,1613	9,7480	13,5479

Figura nº11. Parametrización del empleo equivalente a tiempo completo en el modelo que restringe el stock de capital

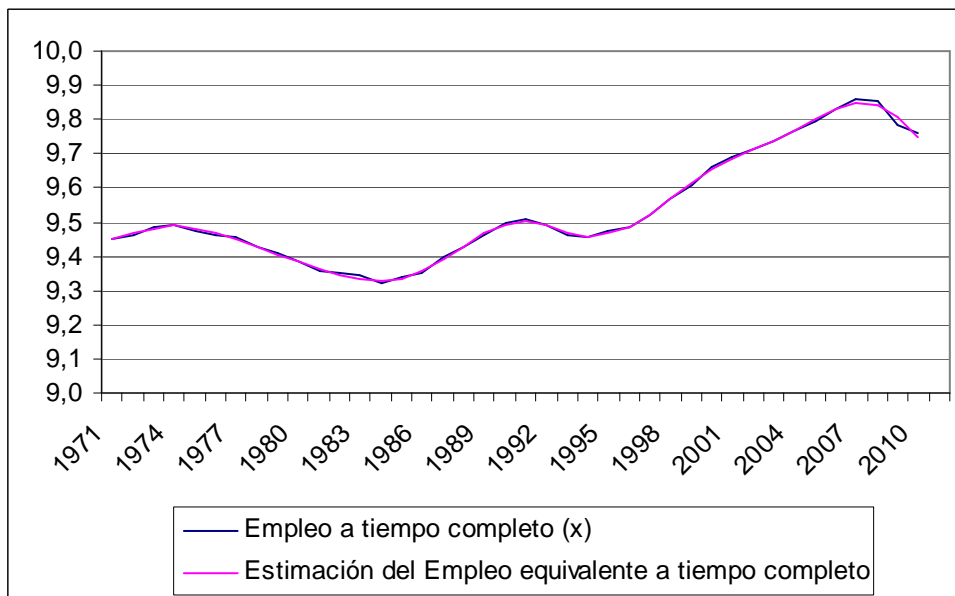
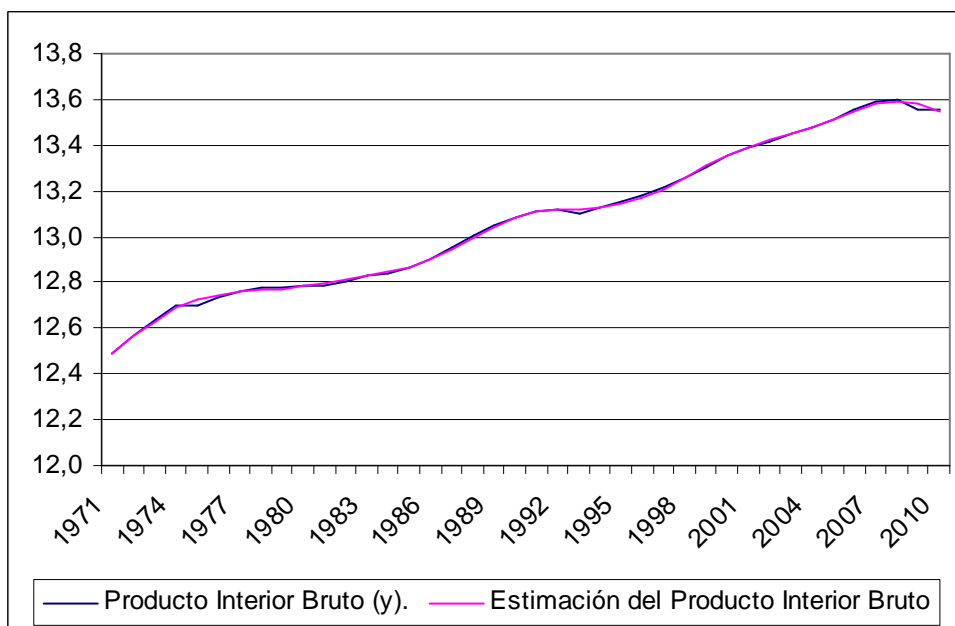


Figura nº12. Parametrización del Producto Interior Bruto en el modelo que restringe el stock de capital



La obtención del modelo que restringe del Producto Interior Bruto ( $y_t$ ) se calcula en la tabla nº 10 utilizando el sistema de ecuaciones (4), los resultados gráficos se incluyen en las figuras nº 13 y nº14

Tabla nº10. Parametrización del modelo que restringe el Producto Interior Bruto

	$\beta$ FFF	$\alpha$ FFF	Producto Interior Bruto (y).	Estimación del Empleo equivalente a tiempo completo	Estimación de Stock de Capital
1971	0,6755	0,9196	12,4885	9,4485	12,3976
1972	0,6761	0,9216	12,5668	9,4705	12,4796
1973	0,6764	0,9241	12,6418	9,4892	12,5685
1974	0,6765	0,9268	12,6965	9,4945	12,6457
1975	0,6764	0,9295	12,7019	9,4659	12,6803
1976	0,6761	0,9323	12,7344	9,4603	12,7461
1977	0,6758	0,9350	12,7624	9,4531	12,8088
1978	0,6754	0,9376	12,7769	9,4366	12,8568
1979	0,6752	0,9401	12,7774	9,4094	12,8867
1980	0,6751	0,9424	12,7903	9,3906	12,9236
1981	0,6752	0,9445	12,7885	9,3606	12,9393
1982	0,6754	0,9464	12,8040	9,3438	12,9662
1983	0,6758	0,9479	12,8260	9,3344	12,9939
1984	0,6761	0,9489	12,8406	9,3250	13,0097
1985	0,6763	0,9495	12,8664	9,3315	13,0340
1986	0,6765	0,9496	12,8979	9,3505	13,0638
1987	0,6764	0,9494	12,9527	9,3932	13,1201
1988	0,6761	0,9494	13,0031	9,4355	13,1779
1989	0,6757	0,9498	13,0493	9,4725	13,2407
1990	0,6751	0,9509	13,0861	9,4958	13,3040
1991	0,6745	0,9527	13,1085	9,5003	13,3612
1992	0,6739	0,9550	13,1153	9,4869	13,4065
1993	0,6733	0,9572	13,1036	9,4584	13,4308
1994	0,6729	0,9590	13,1259	9,4586	13,4822
1995	0,6726	0,9600	13,1527	9,4704	13,5273
1996	0,6724	0,9601	13,1766	9,4897	13,5583
1997	0,6723	0,9596	13,2145	9,5264	13,5961
1998	0,6722	0,9589	13,2583	9,5700	13,6371
1999	0,6720	0,9583	13,3046	9,6141	13,6830
2000	0,6718	0,9581	13,3539	9,6567	13,7371
2001	0,6716	0,9582	13,3897	9,6866	13,7828
2002	0,6712	0,9584	13,4164	9,7093	13,8224
2003	0,6708	0,9586	13,4469	9,7364	13,8670
2004	0,6704	0,9587	13,4790	9,7671	13,9126
2005	0,6700	0,9588	13,5146	9,8004	13,9616
2006	0,6696	0,9591	13,5540	9,8328	14,0172
2007	0,6692	0,9600	13,5891	9,8540	14,0747
2008	0,6687	0,9617	13,5976	9,8450	14,1144
2009	0,6681	0,9644	13,5597	9,7913	14,1178
2010	0,6674	0,9679	13,5565	9,7542	14,1703



Figura nº13. Parametrización del empleo equivalente a tiempo completo en el modelo que restringe el Producto Interior Bruto

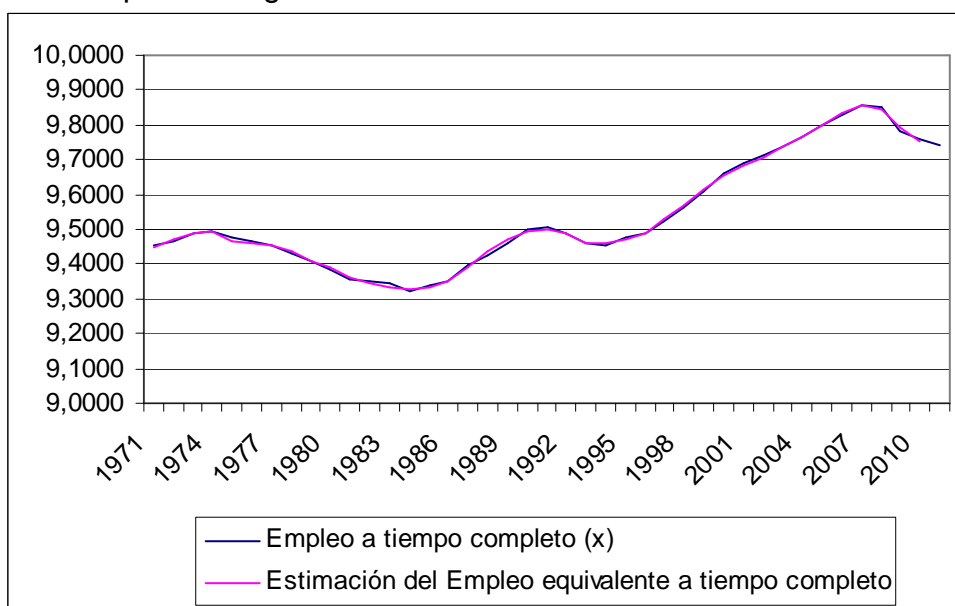
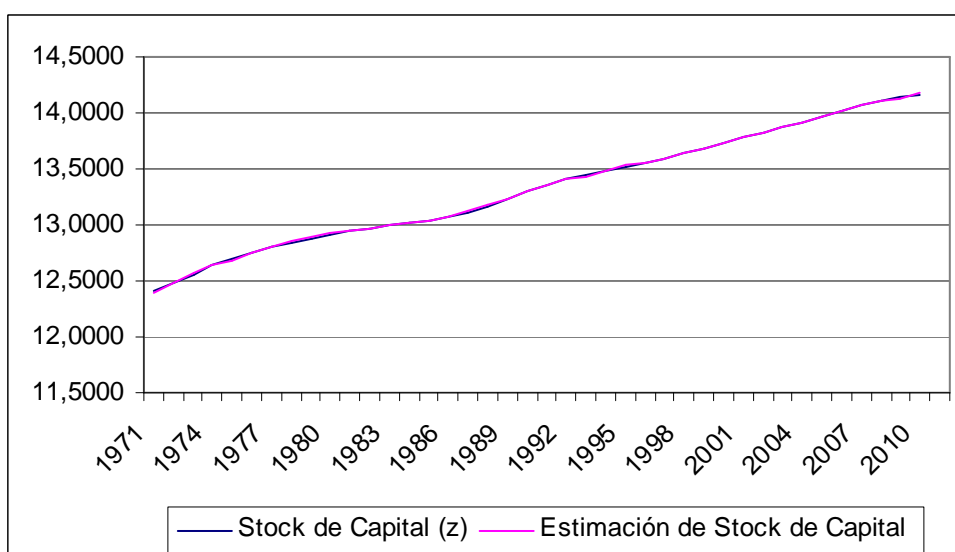


Figura nº14. Parametrización del stock de capital en el modelo que restringe el Producto Interior Bruto



#### Ejemplo 4

A través de la aproximación FFF de  $\beta_t$  radianes puede estimarse directamente el Producto Interior Bruto ( $y_t$ ) a partir de (1). Los cálculos necesarios se recogen en la Tabla nº 11.

Tabla nº10. Estimación del Producto Interior Bruto a través de la aproximación FFF de  $\beta_i$  radianes

	Producto Interior Bruto (Ctes).	Empleo a tiempo completo	Stock de Capital	$\beta$ FFF	r	$r \cdot \text{tg}(\beta)$	FFF Multivariada
1971	12,4885	9,4527	12,4027	0,6755	15,5942	12,4938	12,4900
1972	12,5668	9,4633	12,4765	0,6761	15,6594	12,5614	12,5631
1973	12,6418	9,4875	12,5579	0,6764	15,7389	12,6342	12,6454
1974	12,6965	9,4927	12,6377	0,6765	15,8058	12,6905	12,6916
1975	12,7019	9,4749	12,7019	0,6764	15,8465	12,7201	12,7084
1976	12,7344	9,4642	12,7565	0,6761	15,8839	12,7430	12,7342
1977	12,7624	9,4561	12,8048	0,6758	15,9179	12,7612	12,7628
1978	12,7769	9,4289	12,8470	0,6754	15,9358	12,7670	12,7703
1979	12,7774	9,4072	12,8822	0,6752	15,9514	12,7735	12,7793
1980	12,7903	9,3844	12,9155	0,6751	15,9649	12,7821	12,7872
1981	12,7885	9,3579	12,9430	0,6752	15,9716	12,7896	12,7895
1982	12,8040	9,3486	12,9707	0,6754	15,9886	12,8092	12,8097
1983	12,8260	9,3439	12,9958	0,6758	16,0062	12,8317	12,8307
1984	12,8406	9,3197	13,0135	0,6761	16,0065	12,8406	12,8349
1985	12,8664	9,3370	13,0371	0,6763	16,0357	12,8709	12,8647
1986	12,8979	9,3509	13,0704	0,6765	16,0709	12,9023	12,8987
1987	12,9527	9,3950	13,1149	0,6764	16,1328	12,9502	12,9535
1988	13,0031	9,4281	13,1688	0,6761	16,1959	12,9937	13,0018
1989	13,0493	9,4619	13,2345	0,6757	16,2689	13,0403	13,0476
1990	13,0861	9,4972	13,3004	0,6751	16,3431	13,0844	13,0884
1991	13,1085	9,5067	13,3627	0,6745	16,3994	13,1125	13,1090
1992	13,1153	9,4911	13,4134	0,6739	16,4317	13,1218	13,1132
1993	13,1036	9,4612	13,4473	0,6733	16,4421	13,1157	13,1087
1994	13,1259	9,4562	13,4812	0,6729	16,4670	13,1242	13,1212
1995	13,1527	9,4742	13,5202	0,6726	16,5093	13,1498	13,1514
1996	13,1766	9,4882	13,5541	0,6724	16,5451	13,1731	13,1789
1997	13,2145	9,5228	13,5913	0,6723	16,5954	13,2098	13,2159
1998	13,2583	9,5651	13,6359	0,6722	16,6562	13,2553	13,2578
1999	13,3046	9,6105	13,6859	0,6720	16,7232	13,3049	13,3041
2000	13,3539	9,6595	13,7355	0,6718	16,7919	13,3541	13,3510
2001	13,3897	9,6913	13,7832	0,6716	16,8492	13,3921	13,3889
2002	13,4164	9,7141	13,8270	0,6712	16,8982	13,4216	13,4201
2003	13,4469	9,7379	13,8704	0,6708	16,9474	13,4498	13,4494
2004	13,4790	9,7645	13,9141	0,6704	16,9985	13,4789	13,4782
2005	13,5146	9,7965	13,9616	0,6700	17,0557	13,5128	13,5117
2006	13,5540	9,8290	14,0126	0,6696	17,1162	13,5492	13,5522
2007	13,5891	9,8569	14,0656	0,6692	17,1756	13,5845	13,5937
2008	13,5976	9,8516	14,1113	0,6687	17,2099	13,5986	13,5950
2009	13,5597	9,7832	14,1376	0,6681	17,1925	13,5688	13,5594
2010	13,5565	9,7574	14,1613	0,6674	17,1974	13,5521	13,5571

En la última columna de la tabla se ha realizado una aproximación a una FFF con dos variables (Gallant, 1981,1982), cuya metodología se describe en el anexo. Este tipo de aproximación tienen el inconveniente que necesitan

muchas variable explicativas. En este caso se ha utilizado la expansión descrita en la tabla siguiente:

Tabla nº 11. Aproximacion FFF multivariada del logaritmo del PIB.

	parámetro	t
$y=\alpha$	-112,85	-1,76
x	-8,29	-0,90
z	23,71	5,45
x <sup>2</sup>	1,89	4,69
z <sup>2</sup>	-0,14	-1,29
x*z	-2,03	-3,70
cos(x)	-0,01	-0,20
sen(x)	0,01	0,79
cos(z)	0,10	2,10
sen(z)	0,06	2,53
cos(2*x)	-0,01	-2,37
sen(2*x)	0,01	0,81
cos(2*z)	0,02	3,15
sen(2*z)	-0,06	-6,59
cos(x+z)	0,02	1,24
sen(x+z)	0,04	2,45

Los resultados gráficos de ambas expansiones se representan junto a la serie original en la Figura nº15 y nº16, en la primera se recogen los niveles de las series y en la segunda las diferencia en las series, que al venir expresadas en logaritmos adquieren el significado de tasa de crecimiento anuales.

Figura nº15. Aproximación al Producto Interior Bruto, utilizando una función parametrizada y la FFF multivariada.

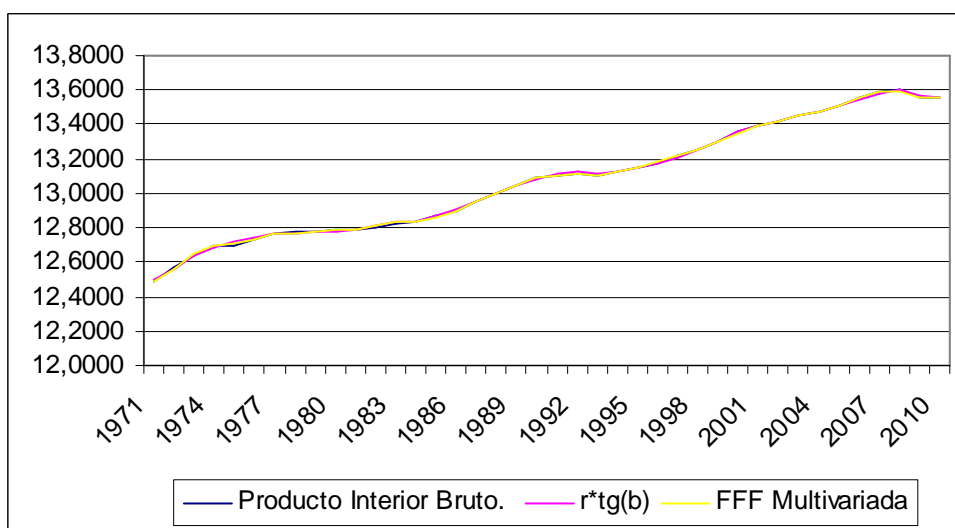
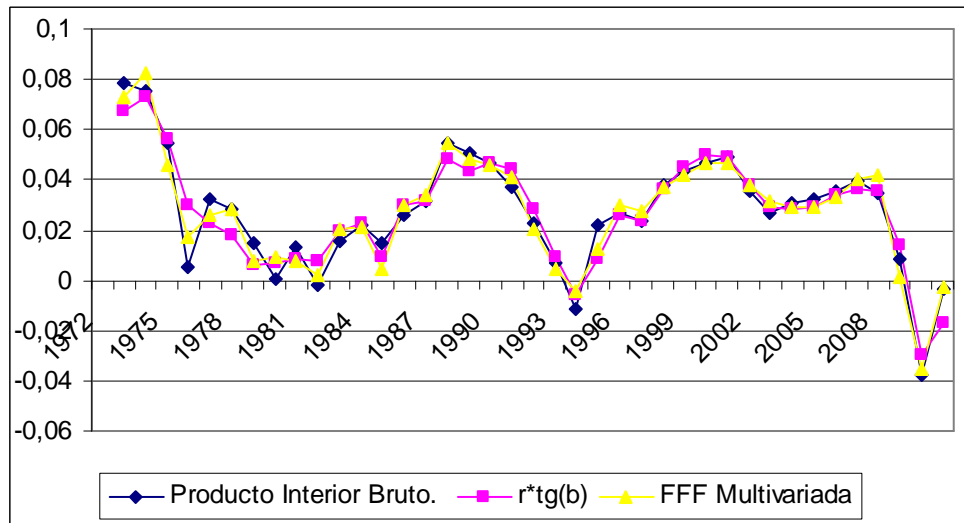


Tabla nº16 .- Diferencias logarítmicas del Producto Interior Bruto, utilizando una función parametrizada y FFF multivariada.



Los resultados son muy similares, si bien el error cuadrático medio de la aproximación FFF Multivariada es menor (0,003845 frente a 0,0014638).

## Anexo Aproximación FFF.

Gallant (1981,1982) introdujo una forma funcional con capacidades muy distintas a las propuestas hasta el momento, cuyas propiedades de flexibilidad eran en todos los casos locales. La forma de Fourier que utiliza Gallant posee la propiedad de flexibilidad global, es decir, permite aproximar arbitrariamente cerca tanto a la función como a sus derivadas sobre todo el dominio de definición de las mismas. La idea que subyace en este tipo de aproximaciones (que podrían denominarse semi-no-paramétricas) es ampliar el orden de la base de expansión, cuando el tamaño de la muestra aumenta, hasta conseguir la convergencia asintótica de la función aproximante a la verdadera función generadora de los datos y a sus derivadas.

Por tratarse de una forma Sobolev-flexible<sup>2</sup> (frente a la Diewert-flexibilidad de las anteriores) es capaz de estimar consistentemente las elasticidades precio y renta sobre todo el espacio de datos (ElBadawi, Gallant y Souza, 1983); además, asintóticamente pueden conseguirse contrastes estadísticos insesgados (Gallant, 1981, 1982) y la eliminación del problema de inferencias aumentadas provocado por la especificación de un determinado modelo. Por último, Gallant y Souza (1991) han mostrado la normalidad asintótica de las estimaciones derivadas de la forma de Fourier.

En la parte negativa, el modelo de Fourier puede conseguir la regularidad global, pero las restricciones paramétricas que ello implica son excesivamente fuertes (Gallant, 1981); sin embargo, existen condiciones más débiles (que no destruyen ni la flexibilidad ni la consistencia de los estimadores) con las que se puede conseguir la regularidad teórica al menos sobre un conjunto finito de puntos (Gallant y Golub, 1983), aunque la implementación de tales restricciones resulta compleja (McFadden, 1985).

En cualquier caso, las simulaciones de Monte Carlo realizadas por Fleissig, Kastens y Terrell (1997) y Chalfant y Gallant (1985) han mostrado que la región de regularidad de la forma de Fourier libre -sin restricciones de ningún tipo- es mucho mayor que la correspondiente a las formas Leontief-Generalizada o Translog.

Un polinomio de Fourier viene dado por la expresión:

$$\frac{a}{2} + \sum_{j=1}^k (u_j \cos(jw_0 t) + v_j \sin(jw_0 t))$$

Donde k es el número de ciclos teóricos o armónicos que consideramos, siendo el máximo n/2.

$w_0 = \frac{2\pi}{n}$  es la frecuencia fundamental (también denominada frecuencia angular fundamental).

t toma los valores enteros comprendidos entre 1 y n (es decir, t = 1, 2, 3, ...n).

Los coeficientes de los armónicos vienen dados por las expresiones:

$$\frac{a}{2} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n y_i, u_j = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (y_i \cos(w_0 t_i j)), v_j = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n y_i \sin(w_0 t_i j)$$

---

<sup>2</sup> Para consultar la norma Sobolev <http://pareto.uab.es/mcreel/Econometrics/econometrics.pdf>

La aproximación a una función no periódica  $g(x)$  por una serie de expansión de Fourier se realiza en Gallart (1981) añadiendo es esta un término lineal y cuadrático. De esta forma que la aproximación univariada se escribe como:

$$g(x/\theta) = a + bx + \frac{1}{2}cx^2 + 2\sum_{j=1}^J u_j \cos(jx) - v_j \sin(jx) \quad (1)$$

El vector de parámetros es  $\theta = (a, b, c, u_1, v_1, \dots, u_J, v_J)$  de longitud  $K = 3 + 2J$ , siendo  $J \approx \sqrt{n}$ .

Suponiendo que los datos siguieran el modelo  $y_i = g(x_i) + e_i$  para  $i=1, 2, \dots, n$  se estimaría  $\theta$  por mínimos cuadrados, minimizando

$$s_n(\theta) = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^n [y_i - g(x_i/\theta)]^2$$

Dado que la variable exógena  $x_i$  no esta expresada en forma periódica, debe de transformarse o normalizarse en un intervalo de longitud menor que  $2\pi$ ,  $[0, 2\pi]$ .

La aproximación multivariada se describe en Gallant (1984):

$$g(x/\theta) = u_0 + b'x + \frac{1}{2}x'Cx + \sum_{\alpha=1}^A \left\{ u_{0\alpha} + 2\sum [u_{j\alpha} \cos(jk'_\alpha x) - v_{j\alpha} \sin(jk'_\alpha x)] \right\}$$

Donde  $C = -\sum_{\alpha=1}^A u_{0\alpha} k_\alpha k'_\alpha$ . La regla de formación de la secuencia  $\{k_\alpha\}$  está dada en Gallant (1981) y en Gallant (1982) para diferentes sistemas.

## Bibliografía

- Barnett, W. A. "New Indices of Money Supply and the Flexible Laurent Demand System." *J. Bus. and Econ. Statist.* 1(1983):7-23.
- Bhansali, R.J. (1979) "A Mixed Spectrum Analysis of the Lynx Data," *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. A*, 142(2), 199-209.
- Campbell, M.J. and Walker, A.M. (1977), "A Survey of Statistical Work on the Mackenzie River Series of Annual Canadian Lynx Trappings for the Years 1821-1934 and a New Analysis," *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. A*, 140(4), 411-431.
- Chalfant J. y Gallant A. (1985), "Estimating substitution elasticities with the Fourier costs function, some Monte Carlo results", *Journal of Econometrics*, 28, 205-222.
- Despotakis, K. A. "Economic Performance of Flexible Functional Forms." *Eur. Econ. Rev.* 30(1986): 1107-43.
- Diewert, W. E. "An Application of the Shephard Duality Theorem: A Generalized Leontief Production Function." *J. Polit. Econ.* 79(1971):481-507.
- Diewert W. y Wales T. (1987), "Flexible Functional Forms and Global Curvature Conditions", *Econometrica*, 55, No. 1, 43-68.
- Diewert W. y Wales T. (1988), "A Normalized Quadratic Semiflexible Functional Form", *Journal of Econometrics*, 37, 327-42.
- Elbadawi, I., A. R. Gallant, and G. Souza. "An Elasticity Can Be Estimated Consistently without A Priori Knowledge of Functional Form." *Econometrica* 51(1983):1731-51.
- Fleissig A., Kastns T. y Terrell D. (1997), "Semi-nonparametric estimates of substitution elasticities", *Economics Letters*, 54, No. 3, 209-219.
- Gallant, A. R.(1981) "On the Bias in Flexible Functional Forms and an Essentially Unbiased Form." *J. Econometrics* 15(1981):211-45.
- Gallant, A. R.(1984) "The Fourier Flexible Form." *Amer. J. Agr. Econ.* 66(1984):204-15.
- Gallant A. y Golub G. (1984), "Imposing Curvature Restrictions on Flexible Functional Forms", *Journal of Econometrics*, 26, 295-321
- Griffin R.C., Montgomery J.M., and Rister M.E.. Selecting Functional Form in Production Function Análisis *Western Journal of Agricultural Economics*, 12(2): 216-227
- Lilyan E. Fulginiti, Richard K. Perrin and Bingxin Yu (2003): "Institution and agricultural productivity in sub-sahara Africa". 25 International Conference of Agricultural Economists (IAAE). Durban South Africa.
- McFadden, D. "Constant Elasticity of Substitution Production Functions." *Rev. Econ. Stud.* 30(1963):73-83. Maddala, G. S. *Econometrics*. New York: McGraw-Hill Book Co., 1977.
- Tovar B., Jara-Díaz S., Trujillo L. (2004). "Funciones de producción y costes y su aplicación al sector portuario. Una revisión de la literatura" DOCUMENTO DE TRABAJO 2004-06. <http://www.fceye.ull.es/new/investigacion/docum/ull-ulpgc/DT2004-06.pdf>
- Uzawa, H. "Production Functions with Constant Elasticity of Substitution." *Rev. Econ. Stud.* 29(1962):291-99.
- White, H. "Using Least Squares to Approximate Unknown Regression Functions." *Int. Econ. Rev.* 21(1980):149-70.